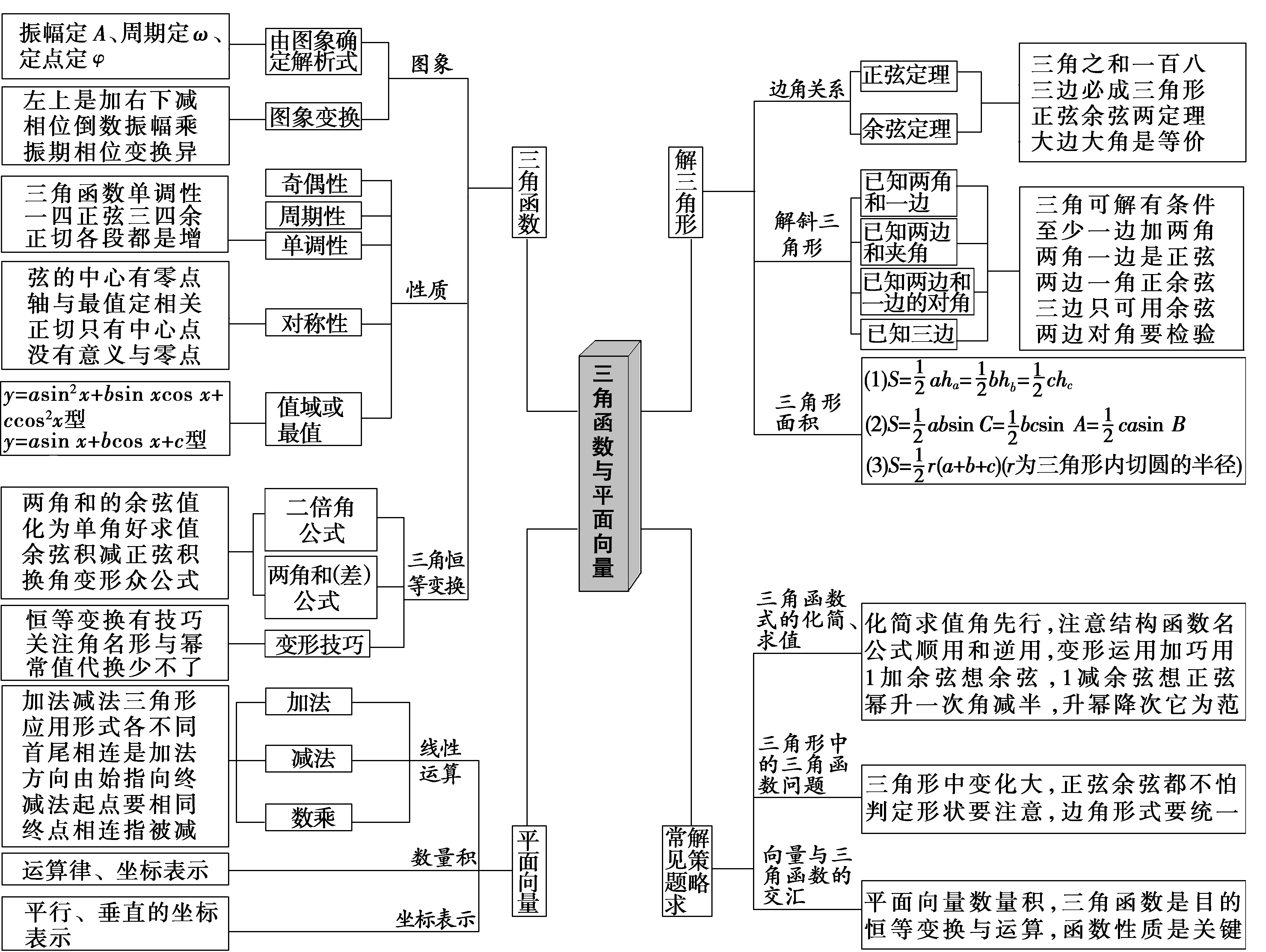
**2023届数学复习专题讲义**

**专题一 三角函数与平面向量**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 年 份 | 题号 | 考查内容 | 分值 | 难易 |
| 2022乙卷 | 3 | 向量的模及数量积的计算 | 5 | 简单 |
| 15 | 三角函数的周期性 | 5 | 适中 |
| 17 | 解三角形（正弦定理、余弦定理、周长计算） | 12 | 适中 |
| 2021乙卷 | 15 | 解三角形（余弦定理、三角形面积公式） | 5 | 适中 |
| 15 | 解三角形（余弦定理、三角形面积公式） | 5 | 适中 |
| 2020二卷 | 2 | 三角函数值的符号、二倍角公式 | 5 | 简单 |
| 17 | 解三角形（正弦定理、余弦定理、周长最值） | 12 | 适中 |

高考在三角函数部分一般是一小题一大题或两到三小题，占到10-17分，平面向量是一小题，及与三角函数、解析几何的综合考查；从试题内容上看，主要考察三角函数的图像与性质，求值以及以三角形为背景的题。

【知识框架】



**第一课时**

1. **知识点复习**

**1. 三角函数定义:**

(1) 设*α* 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点*P*(*x*，*y*)，那么sin *α*＝*y*，cos *α*＝*x*，

tan *α*＝.

1. 各象限角的三角函数值的符号： 一全正，二正弦，三正切，四余弦．

**2. 三角公式:**

1）． 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

(1) sin(*α*±*β*)＝sin *α*cos *β*±cos *α*sin *β*. (2) cos(*α*±*β*)＝cos *α*cos *β*∓sin *α*sin *β*.

(3) tan(*α*±*β*)＝.

2）． 二倍角的正弦、余弦、正切公式

(1) sin 2*α*＝2sin *α*cos *α*. (2) cos 2*α*＝cos2*α*－sin2*α*＝2cos2*α*－1＝1－2sin2*α*.

(3) tan 2*α*＝.

3）． 三角恒等变换的基本思路

(1) “化异为同”，“切化弦”，“1”的代换是三角恒等变换的常用技巧．

“化异为同”是指“化异名为同名”，“化异次为同次”，“化异角为同角”．

(2) 角的变换是三角变换的核心，如*β*＝(*α*＋*β*)－*α*，2*α*＝(*α*＋*β*)＋(*α*－*β*)等．

**二、题型归纳：**

**(一)三角函数定义**

**例1**：在平面直角坐标系中，若角的始边为轴的非负半轴，其终边经过点.



（1）求的值； （2）求的值.

**拓展训练**：（21北京模拟）在平面直角坐标系中，角与角均以为始边，它们的终边关于轴对称．若，则=（ ）

（A） （B） （C） （D）

**（二）三角求值**

**例2.**（2020年全国1，9）已知，且，则（ ）

A． B． C． D．

**变式1、**已知*α*为锐角，且，则*α*的值为（ ）

A．70° B．60° C．50° D．40°

**变式2**. 已知cos *α*＝，cos(*α*－*β*)＝，若0<*β*<*α*<，则*β*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

**三、练习巩固：**

**1.**（20全国3，9）已知2tan*θ*–tan(*θ*+)=7，则tan*θ*=（ ）

A．–2 B．–1 C．1 D．2

**2.**（20浙江13）已知，则\_\_\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_\_\_．

**3.** 已知*α*，*β*∈(0，π)，且tan(*α*－*β*)＝，tan *β*＝－，则2*α*－*β*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_.

**4.**（20全国2）若*α*为第四象限角，则（ ）

A．cos2*α*>0 B．cos2*α*<0 C．sin2*α*>0 D．sin2*α*<0

**5.（**21新高考1、6）若，则（ ）

A. B. C. D.

6．（21全国甲卷）若，则（ ）

A． B． C． D．

**第二课时 三角函数图像与性质**

**一 、知识点复习**

1. **正弦、余弦、正切的图象及性质:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 函数  性质 | *y*＝sin *x* | *y*＝cos *x* | *y*＝tan *x* |
| 定义域 | R | R | {*x*|*x*≠*k*π＋，*k*∈Z} |
| 图象 |  |  |  |
| 值域 | [－1,1] | [－1,1] | R |
| 对称性 | 对称轴：x＝kπ＋(k∈Z)；对称中心：(kπ，0)(k∈Z) | 对称轴：x＝  kπ(k∈Z)；对称中心：  (kπ＋，0)(k∈Z) | 对称中心：(k∈Z) |
| 周期 | 2π | 2π | π |
| 单调性 | 单调增区间[2*k*π－，2*k*π＋](*k*∈Z)； | 单调减区间  [2*k*π＋，2*kπ*＋]  (k∈Z)  单调增区间  [2*k*π－π，2*k*π]( *k*∈Z)； | 单调增区间  (*k*π－，*k*π＋)(*k*∈Z) |
| 奇偶性 | 奇 | 偶 | 奇 |

1. ***y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)的图象及性质:**

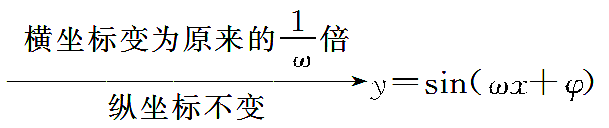
(1) 五点作图法：五点的取法：设*X*＝*ωx*＋*φ*，*X*取0，，π，，2π时求相应的*x*值、*y*值，再描点作图．

(2) 给出图象求函数表达式的题目，比较难求的是*φ*，一般是从“五点法”中的第一点

(－ ，0) 作为突破口．

(3) 图象变换 *y*＝sin *x*()()*y*＝sin(*x*＋*φ*)

*y*＝*A*sin(*ωx*＋*φ*)

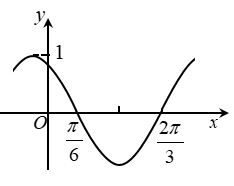


**二、例题归纳．**

**（一）三角函数图像**

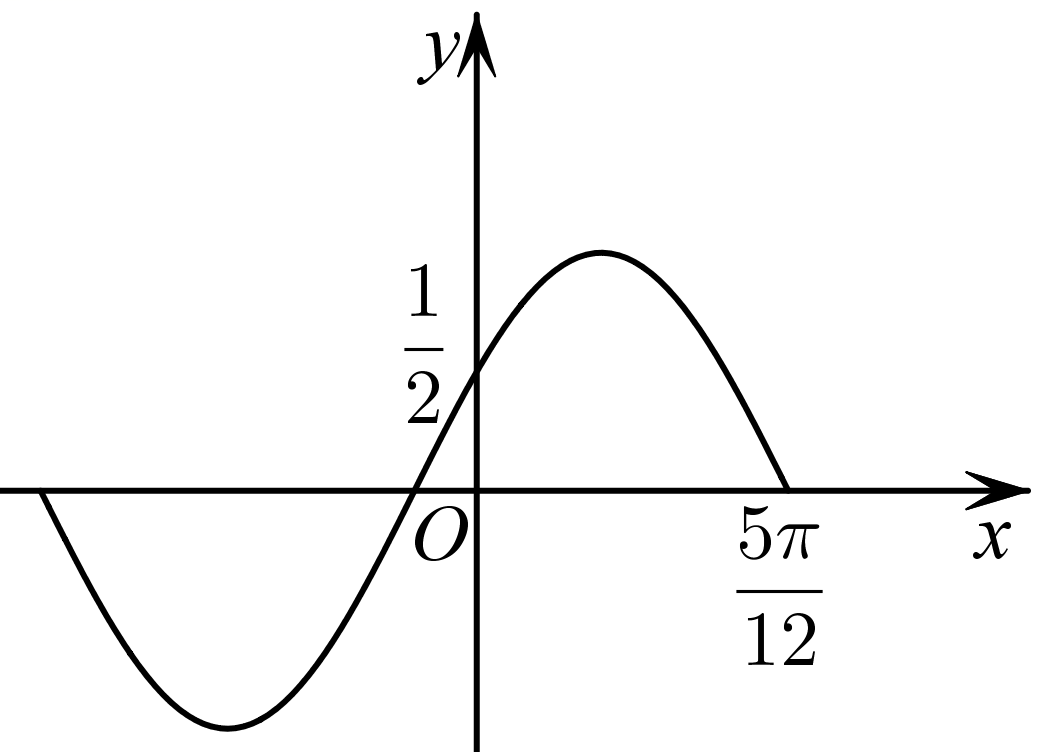
**例1、**（20新高考11） 下图是函数*y*= sin(*ωx*+*φ*)的部分图像，则sin(*ωx*+*φ*)= （ ）

（多选）



A.  B.  C.  D. 

**变式1：**已知函数在一个周期内的图象如图所示，图中，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.



**变式2**（21全国乙7）把函数图像上所有点的横坐标缩短到原来的倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移个单位长度，得到函数的图像，则（ ）

A． B． C． D．

**（二）三角函数性质**

**例2、（1）**(20天津8) 已知函数．给出下列结论：

① 的最小正周期为； ② 是的最大值；

③ 把函数的图象上所有点向左平移个单位长度，可得到函数的图象．

其中所有正确结论的序号是（ ）

A．① B．①③ C．②③ D．①②③

**（2）**(20北京14)若函数的最大值为2，则常数的一个取值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

**变式1**：（22年新高考1卷）记函数的最小正周期为T，若，且的图像关于点中心对称，则 （ ）

A．1 B． C． D．3



**变式2：**（20全国3,16）关于函数*f*（*x*）=有如下四个命题：

① *f*（*x*）的图像关于*y*轴对称． ② *f*（*x*）的图像关于原点对称．

③ *f*（*x*）的图像关于直线*x*=对称． ④ *f*（*x*）的最小值为2．

其中所有真命题的序号是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**三、练习巩固：**

1 、 (21北京7）.已知函数，则该函数（ ）

A. 奇函数，最大值为2 B. 偶函数，最大值为2

C. 奇函数，最大值为 D. 偶函数，最大值为

2、（22全国甲卷）.已知函数在区间恰有三个极值点、两个零点，则的取值范围是（ ）



A.  B.  C.  D. 

3、（20江苏10）将函数的图象向右平移个单位长度，则平移后的图象中与*y*轴最近的对称轴的方程是

4、（22全国乙卷15）记函数的最小正周期是T，若为的零点，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_



**第三课时 解三角形**

1. **知识点复习：**

1. 正弦定理

＝＝＝2*R*(2*R*为△*ABC*外接圆的直径)．

变形：1）*a*＝2*R*sin *A*，*b*＝2*R*sin *B*，*c*＝2*R*sin *C*；2）sin *A*＝，sin *B*＝，sin *C*＝；

1. *a*∶*b*∶*c*＝sin *A*∶sin *B*∶sin *C*.

2. 余弦定理

*a*2＝*b*2＋*c*2－2*bc*cos *A*， *b*2＝*a*2＋*c*2－2*ac*cos *B*， *c*2＝*a*2＋*b*2－2*ab*cos *C*.

推论： cos *A*＝， cos *B*＝， cos *C*＝.

3. 面积公式 *S*△*ABC* ＝ *bc*sin *A* ＝ *ac*sin *B* ＝ *ab*sin *C*.

4. 三角形中的常用结论 (1) 三角形内角和定理： *A*＋*B*＋*C*＝π ；

(2) *A*>*B*>*C* ⇔ *a*>*b*>*c* ⇔ sin *A*>sin *B*>sin *C*； (3) *a* ＝ *b*cos *C*＋*c*cos *B*.

**二、题型归纳：**

**（一）正、余弦定理应用**

**例1** (22全国乙卷)的内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*，已知．

（1）证明：； （2）若，求的周长．



**变式1**  已知在锐角中，内角，，所对的边分别为，，，且.



（1）求角；

（2）若，求的取值范围.



**变式2**：在中，角，，所对的边分别为，，，且．



（1）求；

（2）若，求面积的最大值．



**（二）三角形种的几何计算**

**例2、**下面问题的条件①，②，③，④有多余，现请你在①，④中删去一个，并将剩下的三个作为条件解答这个问题．

已知中，是边的中点，你删去的条件是\_\_\_\_\_请写出用剩余条件解答本题的过程．

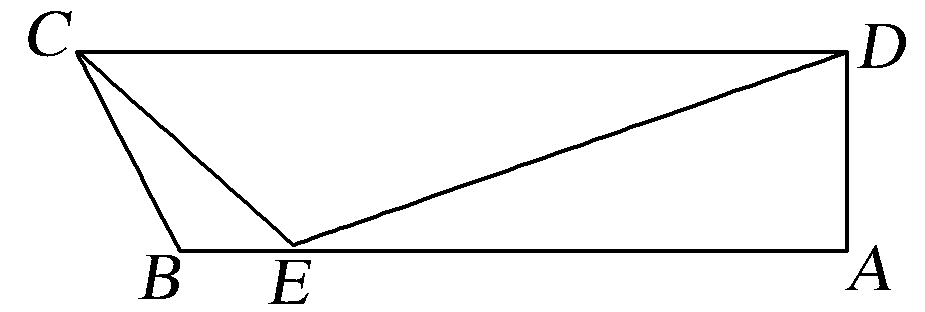


（1）求的长；

（2）的平分线交于点，求的长．

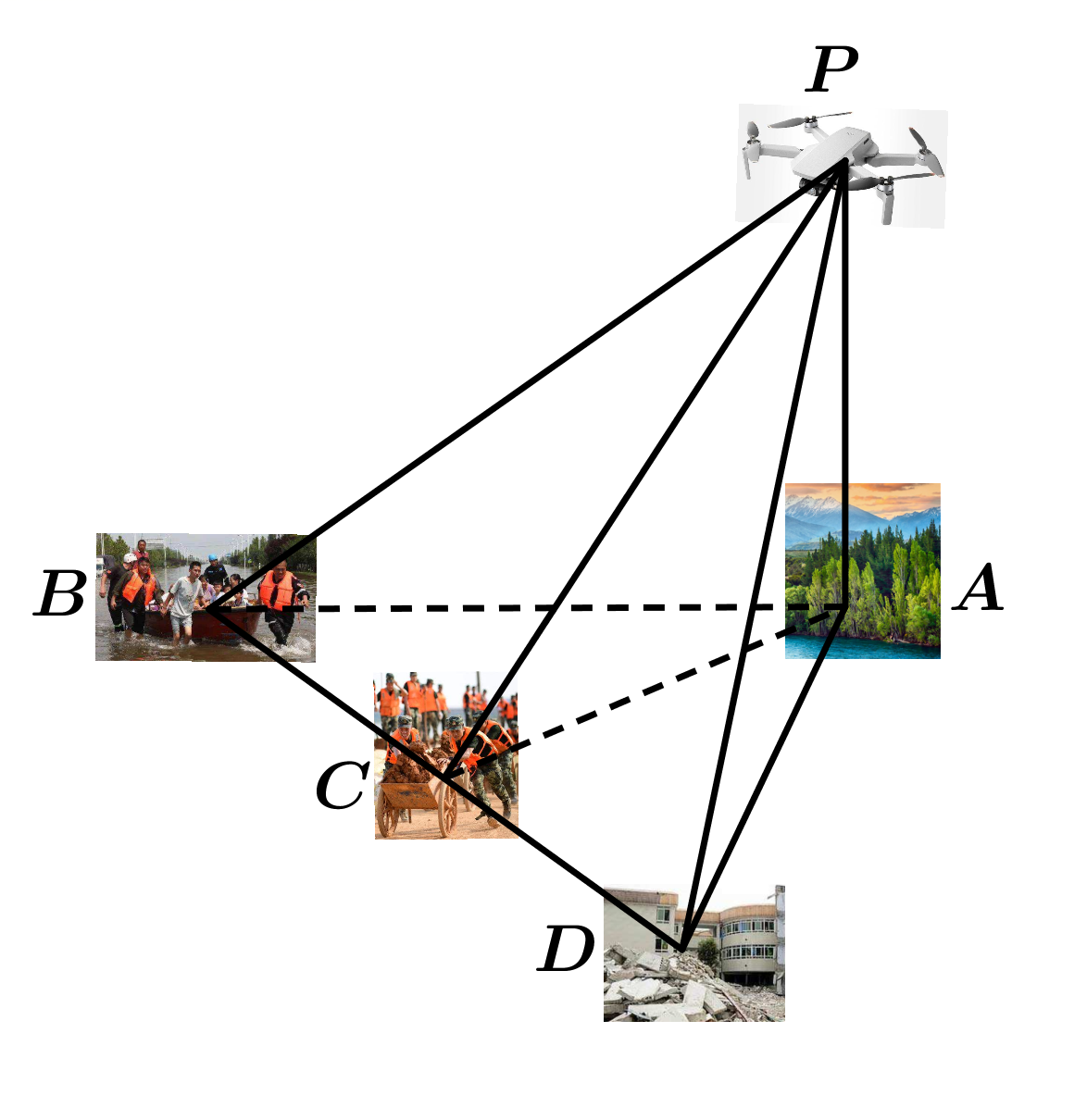
注：如果选择删去条件①和条件④分别解答，按第一个解答计分．

**变式**： 如图，在平面四边形*ABCD*中，已知*A*＝，*B*＝，*AB*＝6.在*AB*边上取点*E*，使得*BE*＝1，连接*EC*，*ED*.若∠*CED*＝，*EC*＝.



（1）求sin∠*BCE*的值；

(2) 求*CD*的长.



**（三）三角实际应用**

**例3** 我国无人机技术处于世界领先水平，并广泛民用于抢险救灾､视频拍摄､环保监测等领域．如图，有一个从地面处垂直上升的无人机，对地面两受灾点的视角为，且．已知地面上三处受灾点共线，且，，则无人机到地面受灾点处的遥测距离*PD*的长度是（ ）

A． B． C． D．

三、**练习巩固：**

1（20全国3,7）在△*ABC*中，cos*C*=，*AC*=4，*BC*=3，则cos*B*=（ ）

A． B． C． D．

2.（21天津16）在，角所对的边分别为，已知，． （I）求*a*的值； （II）求的值；

（III）求的值．

3（20新高考17）在①，②，③这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求的值；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在，它的内角的对边分别为，且，，\_\_\_\_\_\_\_\_?

**4**.（20浙江18）在锐角△*ABC*中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*．已知．

（Ⅰ）求角*B*的大小； （Ⅱ）求cos*A*+cos*B*+cos*C*的取值范围．

**第四课时 平面向量**

1. **知识点复习：**

1. 向量的概念

(1)零向量模的大小为0，方向是任意的，它与任意非零向量都共线，记为0.

(2)长度等于1个单位长度的向量叫单位向量，***a***的单位向量为±.

(3)方向相同或相反的向量叫共线向量(平行向量)．

(4)如果直线*l*的斜率为*k*，则***a***＝(1，*k*)是直线*l*的一个方向向量．

(5)向量的投影：|***b***|cos〈***a***，***b***〉叫做向量***b***在向量***a***方向上的投影．

2．向量的运算

(1)向量的加法、减法、数乘向量是向量运算的基础，应熟练掌握其运算规律．

(2)平面向量的数量积的结果是实数，要注意运算数量积与实数运算律的差异，平面向量的数量积不满足结合律与消去律．***a***·***b***运算结果不仅与***a***，***b***的长度有关而且与***a***与***b***的夹角有关，即***a***·***b***＝|***a***||***b***|cos 〈***a***，***b***〉．

3．两非零向量平行、垂直的充要条件

若***a***＝(*x*1，*y*1)，***b***＝(*x*2，*y*2)，则***a***∥***b*** ⇔ ***a***＝*λ****b*** ⇔ *x*1*y*2－*x*2*y*1＝0.

***a***⊥***b*** ⇔ ***a***·***b***＝0 ⇔ *x*1*x*2＋*y*1*y*2＝0.

可利用它处理几何中的**两线平行、垂直**问题。

**二、题型归纳：**

**（一）平面向量的运算**

**例1．**（19模拟）如图所示，在同一个平面内，向量，，的模分别为，，，与的夹角为，且，与的夹角为．若，



则 ．



**变式**(2022新高考1)在△中，点D在边AB上，记，则（ ）



1.  B.  C.  D. 

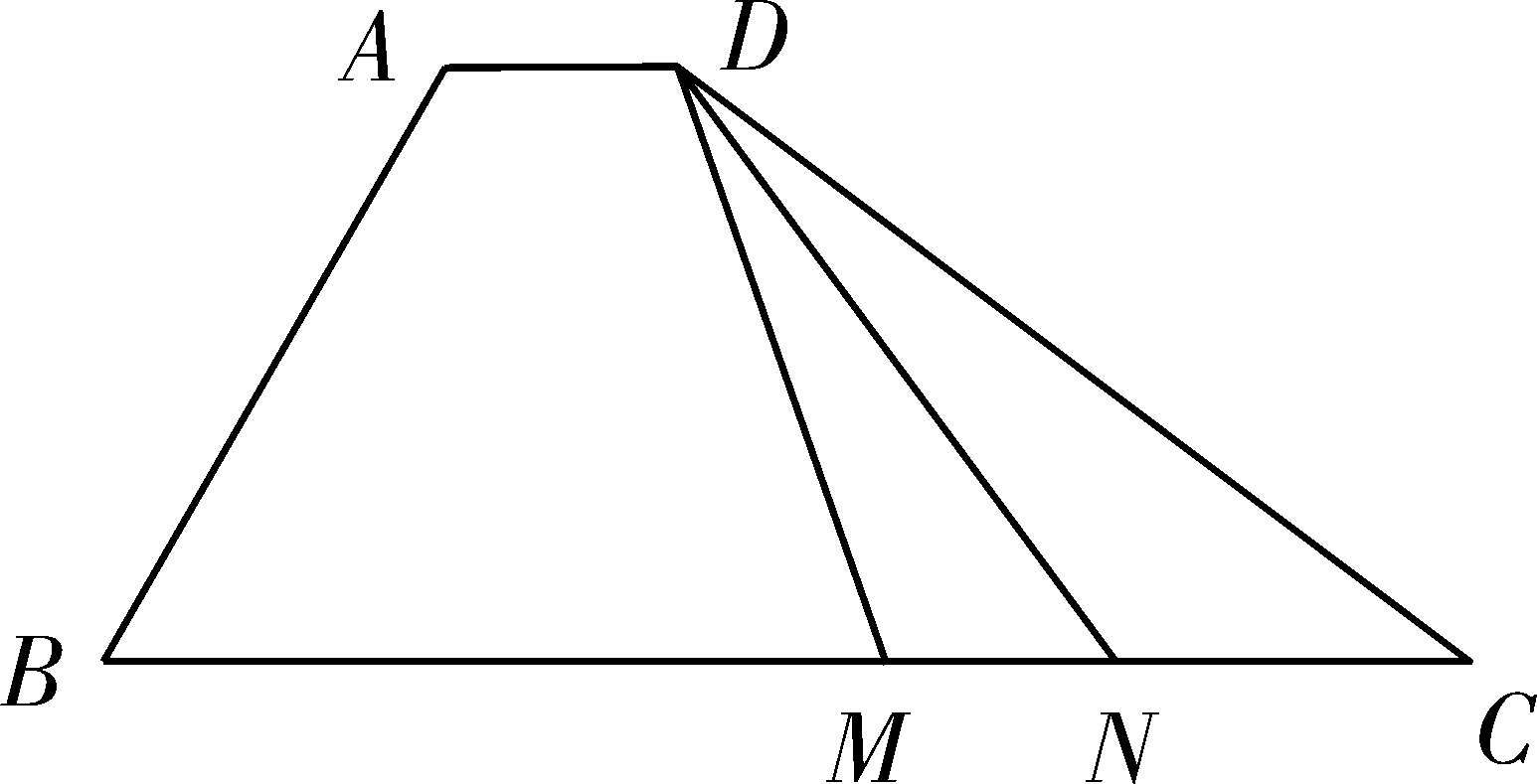
**例2.**（20全国2，13） 已知单位向量***a***，***b***的夹角为45°，*k****a***–***b***与***a***垂直，则*k*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**变式**（21全国甲14）已知向量．若，则\_\_\_\_\_\_\_\_．



**（二）平面向量数量积及其应用**

**例3.**（20天津15）如图，在四边形中，，，且，则实数的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_，若是线段上的动点，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



**变式1**（20全国3，6）已知向量***a***，***b***满足****，，，则（ ）

A． B． C． D．

**变式2**（21北京13），，，则\_\_\_\_\_\_\_；\_\_\_\_\_\_\_．



**变式3**（22全国乙卷 ）设满足，则=（ ）

A．-2 B．-1 C．1 D．2

**三、练习巩固：**

1.（22年全国甲）设向量的夹角余弦值为，且，则=\_\_\_\_\_\_\_\_



2.（21新高考1）（多选）10.已知为坐标原点，点，，，，则（ ）



A. B.



C. D.



3.（19年全国I）已知非零向量***a***，***b***满足，且***b***，则***a***与***b***的夹角为（ ）



A． B． C． D．



4（21全国乙14）已知向量，若，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

5.（21天津15）在边长为1的等边三角形*ABC*中，*D*为线段*BC*上的动点，且交*AB*于点*E*．且交*AC*于点*F*,则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

6. 已知函数 ．

(1) 当∈[0，)时，求函数的单调递增区间；

(2) 设△ABC的内角A，B，C的对边分别为，且＝3，＝2，

若向量＝(1，sin A)与向量=(2，sin B)共线，求的值．