**13.2.2 空间两条直线的位置关系**

**【考点梳理】**

* **考点一：异面直线的概念理解**
* **考点二：异面直线的判定**
* **考点三：证明异面直线垂直**
* **考点四：求异面直线所成的角**
* **考点五：异面直线所成的角求其他量**
* **考点六：空间两条直线的综合问题**

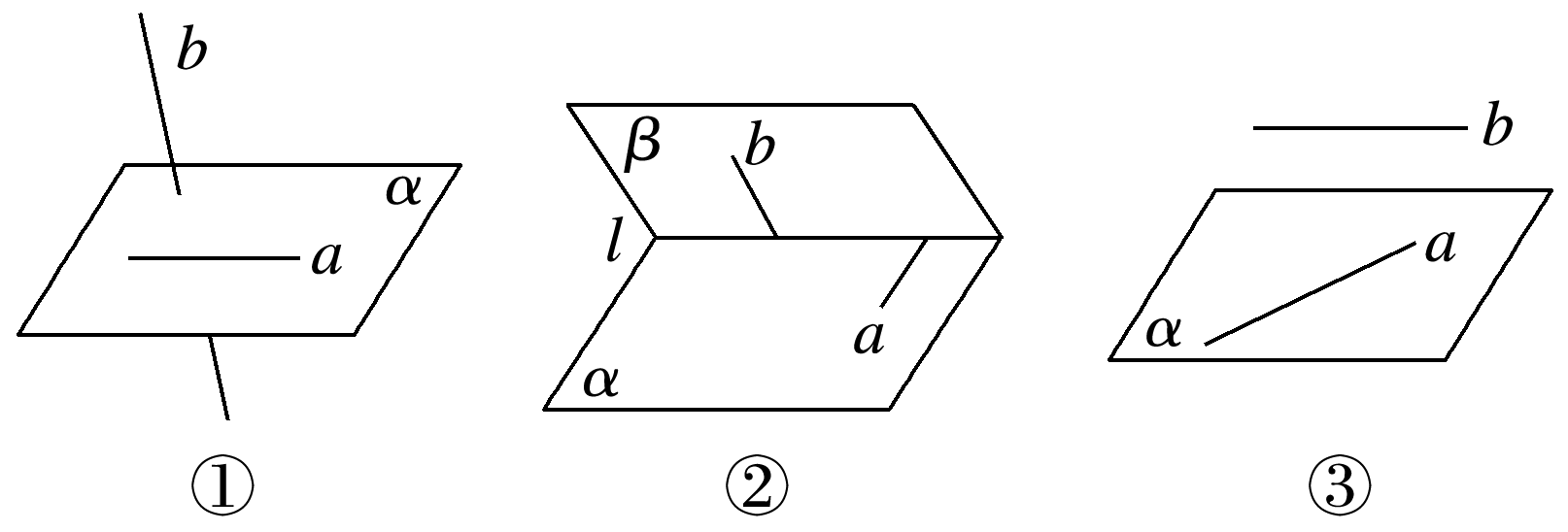
**【知识梳理】**

**知识点1：两直线的位置关系**

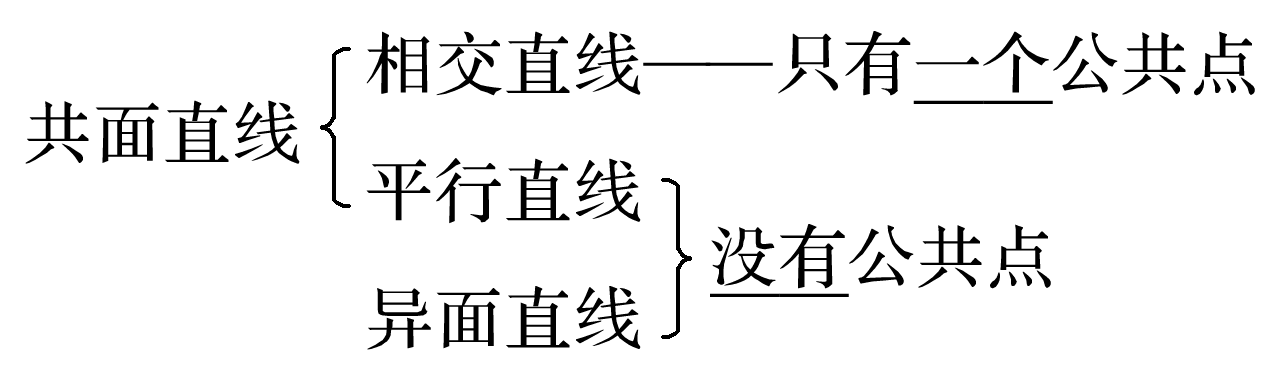
1.异面直线

(1)定义：不同在任何一个平面内的两条直线.

(2)画法：



2.两条直线的位置关系



3.两个定理

(1)基本事实4

①文字语言：平行于同一条直线的两条直线平行.

②符号语言：直线*a*，*b*，*c*，*a*∥*b*，*c*∥*b*⇒*a*∥*c*.

③作用：证明空间两条直线平行.

(2)等角定理

①内容：如果空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

②作用：证明两个角相等或互补.

4.平面内两直线的夹角

(1)定义：平面内两条直线相交成4个角，其中不大于90°的角称为这两条直线所成的角(或夹角)；规定两直线平行时夹角为0°，垂直时夹角为90°.

(2)范围：两条直线夹角*α*的取值范围是0°≤*α*≤90°.

**知识点2：异面直线所成的角**

1.定义：已知两条异面直线*a*，*b*，经过空间任意一点*O*分别作直线*a*′∥*a*，*b*′∥*b*，则异面直线*a*与*b*所成的角(或夹角)就是直线*a*′与*b*′所成的锐角(或直角).

2.范围：0°<*θ*≤90°.特别地，当*θ*＝90°时，*a*与*b*互相垂直，记作*a*⊥*b*.

**【题型归纳】**

**题型一：异面直线的概念理解**

1．（22-23高一·全国）两条异面直线指的是（    ）

A．不同在任何一个平面内的两条直线

B．在空间内不相交的两条直线

C．分别位于两个不同平面内的直线

D．某一个平面内的一条直线和这个平面外的一条直线

【答案】A

【分析】根据异面直线的定义判断即可.

【详解】解：两条异面直线指的是不同在任何一个平面内的两条直线，故A正确；

空间中不相交的两条直线可以平行或异面，故B错误；

分别位于两个不同平面内的两条直线可以平行、相交或异面，故C错误；

某一个平面内的一条直线和这个平面外的一条直线可以平行、相交或异面，故D错误.

故选：A

2．（21-22高一下·安徽合肥·期中）异面直线是指（    ）

A．不同在任何一个平面内的两条直线

B．平面内的一条直线与平面外的一条直线

C．分别位于两个不同平面内的两条直线

D．空间中两条不相交的直线

【答案】A

【分析】利用定义可以判断选项A正确,借助空间想象力判断选项BCD错误.

【详解】解：A. 异面直线是指不同在任何一个平面内的两条直线，所以该选项正确；

B. 平面内的一条直线与平面外的一条直线，可能平行、异面和相交，所以该选项错误；

C. 分别位于两个不同平面内的两条直线，不一定是异面直线，也有可能平行、异面和相交，所以该选项错误；

D. 空间中两条不相交的直线，可能异面或者平行，所以该选项错误.

故选：A

3．（20-21高一下·全国）已知，为不同的平面，*a*，*b*，*c*为不同的直线，则下列说法正确的是（    ）

A．若，，则*a*与*b*是异面直线 B．若*a*与*b*异面，*b*与*c*异面，则*a*与*c*异面

C．若*a*，*b*不同在平面内，则*a*与*b*异面 D．若*a*，*b*不同在任何一个平面内，则*a*与*b*异面

【答案】D

【分析】直接利用直线和平面的位置关系和异面直线的定义判断A、B、C、D的结论．

【详解】已知，为不同的平面，，，为不同的直线，

对于A：若，，则与是异面直线或平行直线或相交直线，故A错误；

对于B：若与是异面直线，与是异面直线，则与也可能是异面直线或平行直线，故B错误；

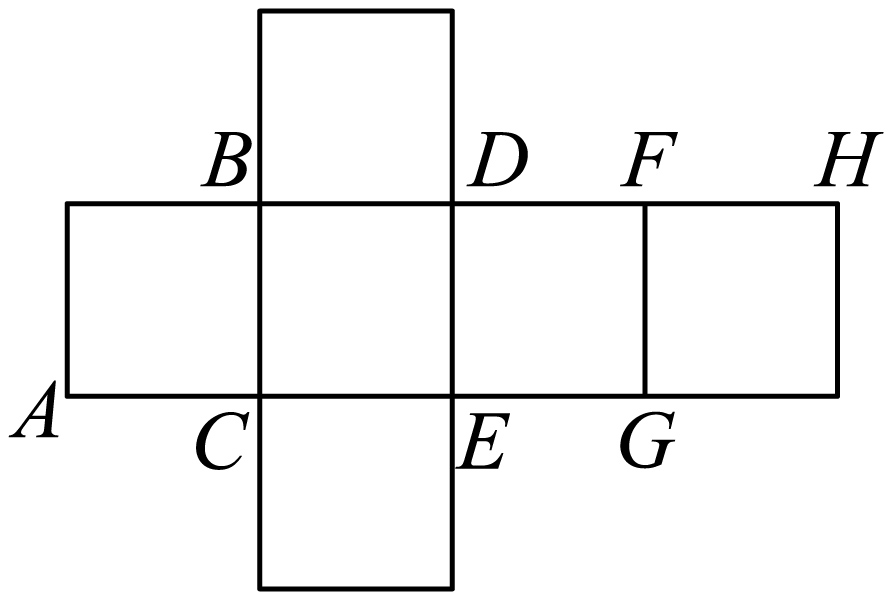
对于C：若，不同在平面内，则与是异面直线或平行直线或相交直线，故C错误；

对于D：根据异面直线的定义，若，不同在任何一个平面内，则与是异面直线，故D正确．

故选：D

**题型二：异面直线的判定**

4．（23-24高一下·山西运城）如图是一个正方体的展开图，如果将它还原为正方体，下列命题正确的是（    ）



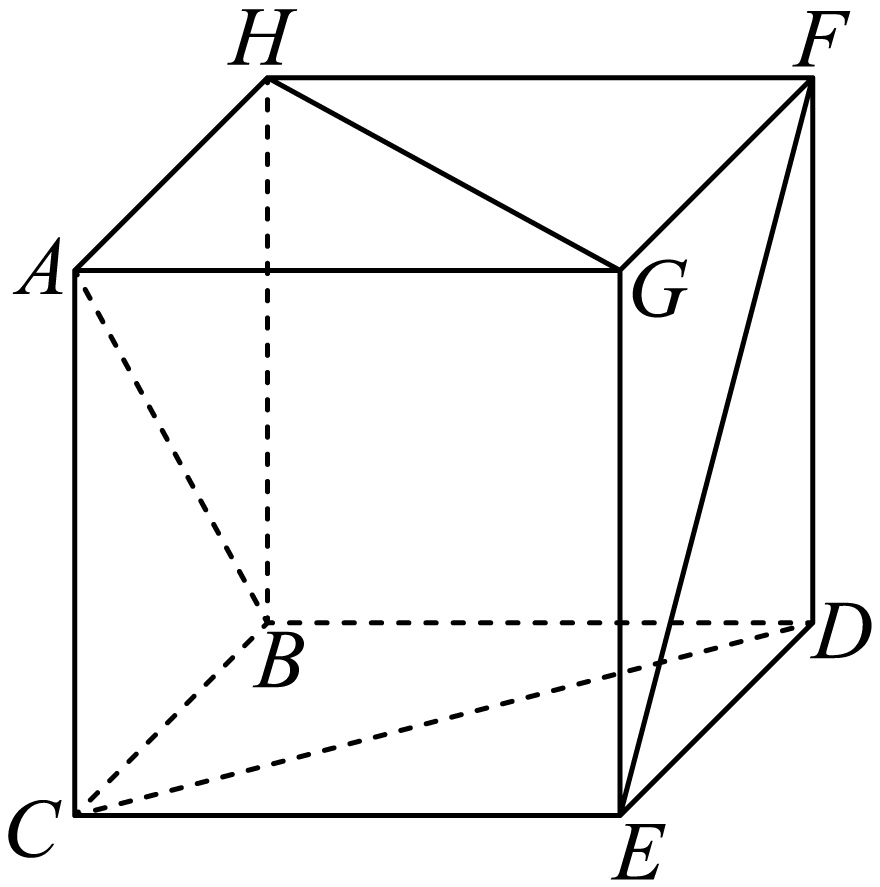
A．*AB*与*HG*相交 B．*AB*与*EF*平行

C．*AB*与*CD*相交 D．*EF*与*CD*异面

【答案】D

【分析】首先还原正方体，再根据选项判断线线的位置关系.

【详解】由图可知与异面，与异面，与异面，与异面.



故选：D

5．（23-24高一下·黑龙江佳木斯·期中）三棱柱中，、、分别是、、中点，则下列直线中与直线异面的直线为（    ）

A．直线 B．直线 C．直线 D．直线

【答案】B

【分析】连接，即可证明且，从而判断A、C，观察可判断D，根据异面直线的定义判断B.

【详解】如图，连接，则且，又且，

所以且，

所以四边形为平行四边形，所以，故C错误；

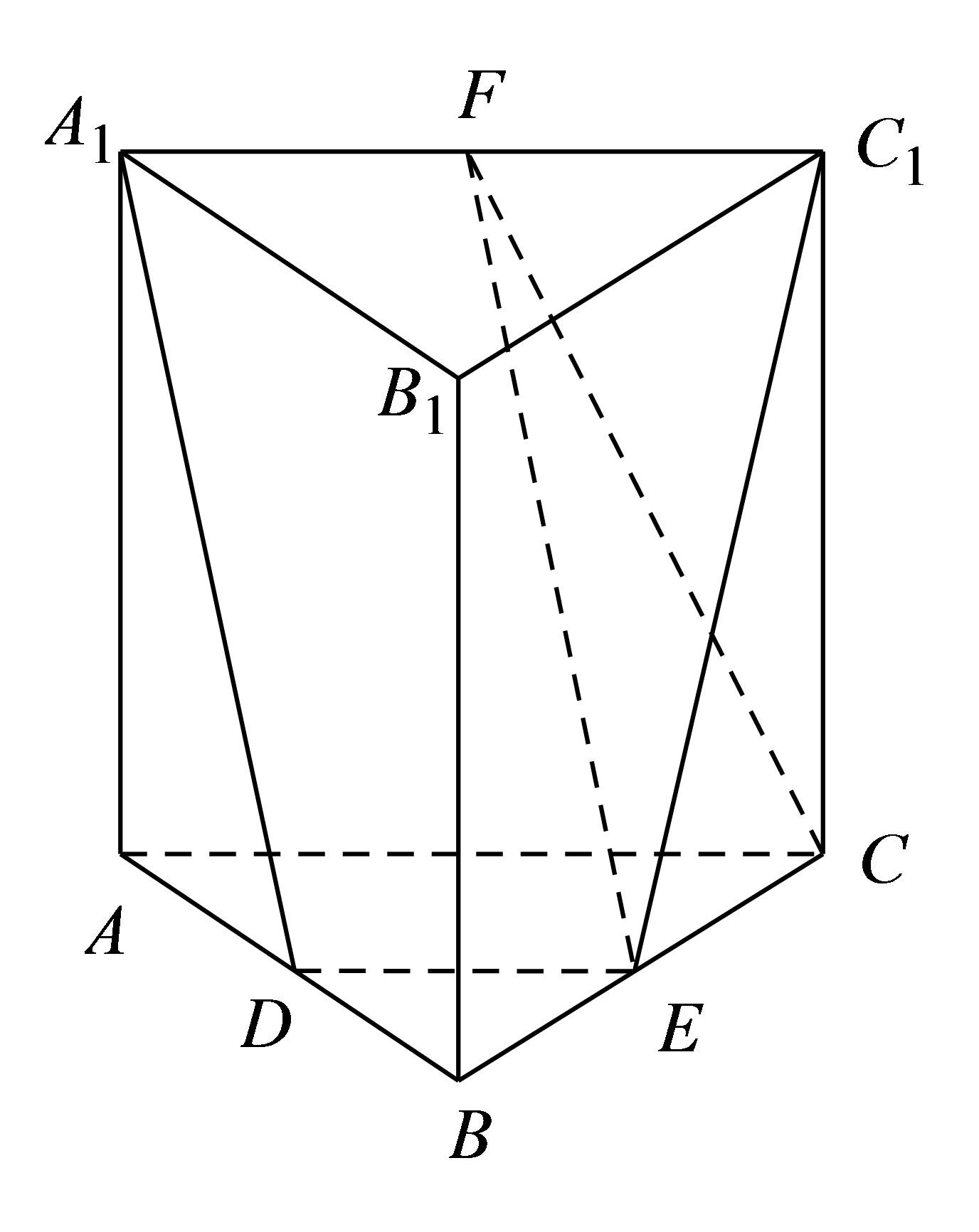
又，，所以，所以、、、四点共线，

即直线与直线共面，故A错误；

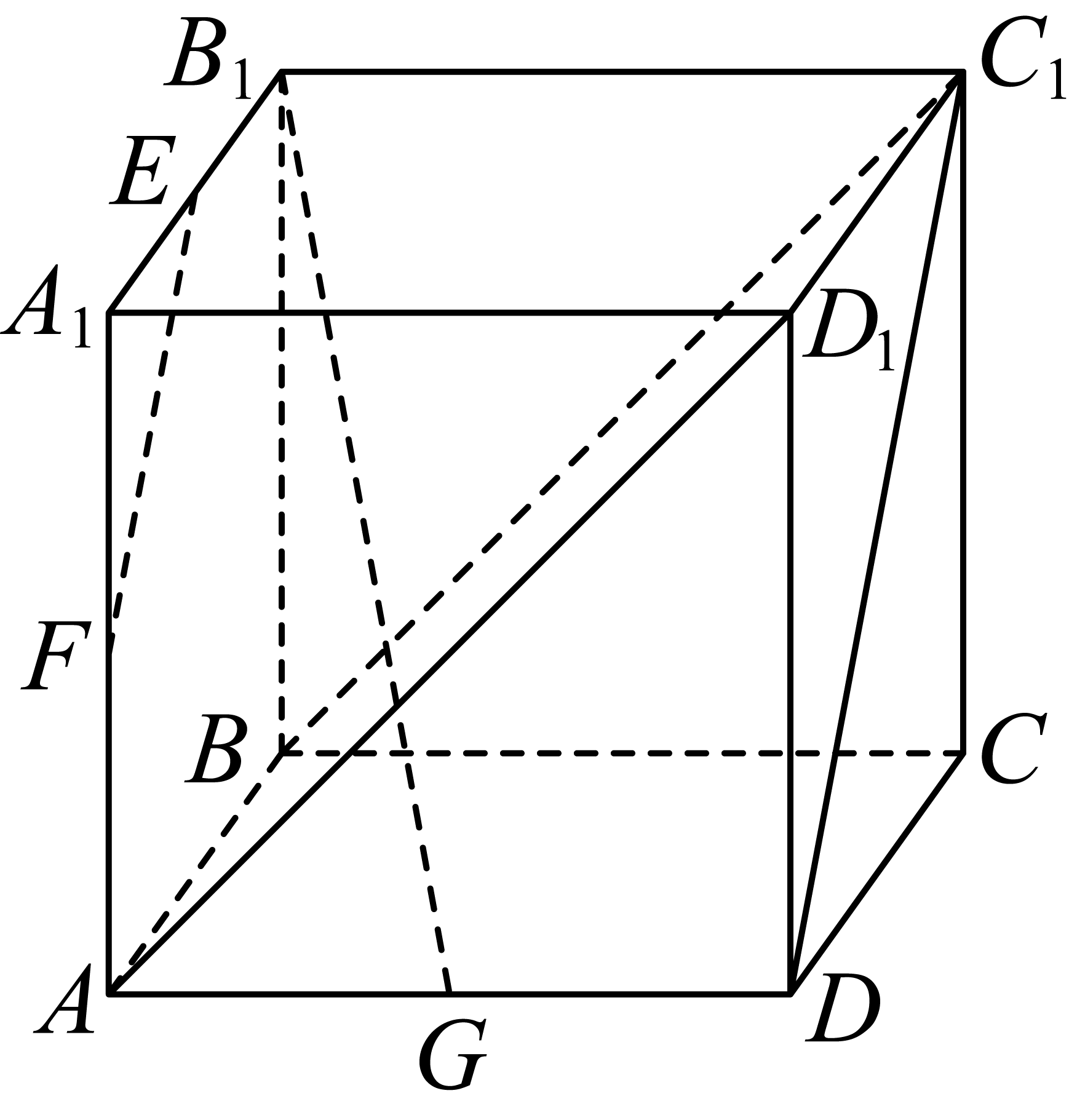
显然直线与直线均包含于平面，故D错误；

因为，，，又平面，所以直线与直线异面，故B正确.

故选：B



6．（23-24高一下·浙江·期中）已知正方体，、、分别为、、的中点，则图中与直线异面的直线是（    ）



A． B． C． D．

【答案】B

【分析】根据异面直线的定义逐项判断.

【详解】根据已知，可得，而，所以，A错误；

平面，平面，，

所以与是异面直线，B正确；

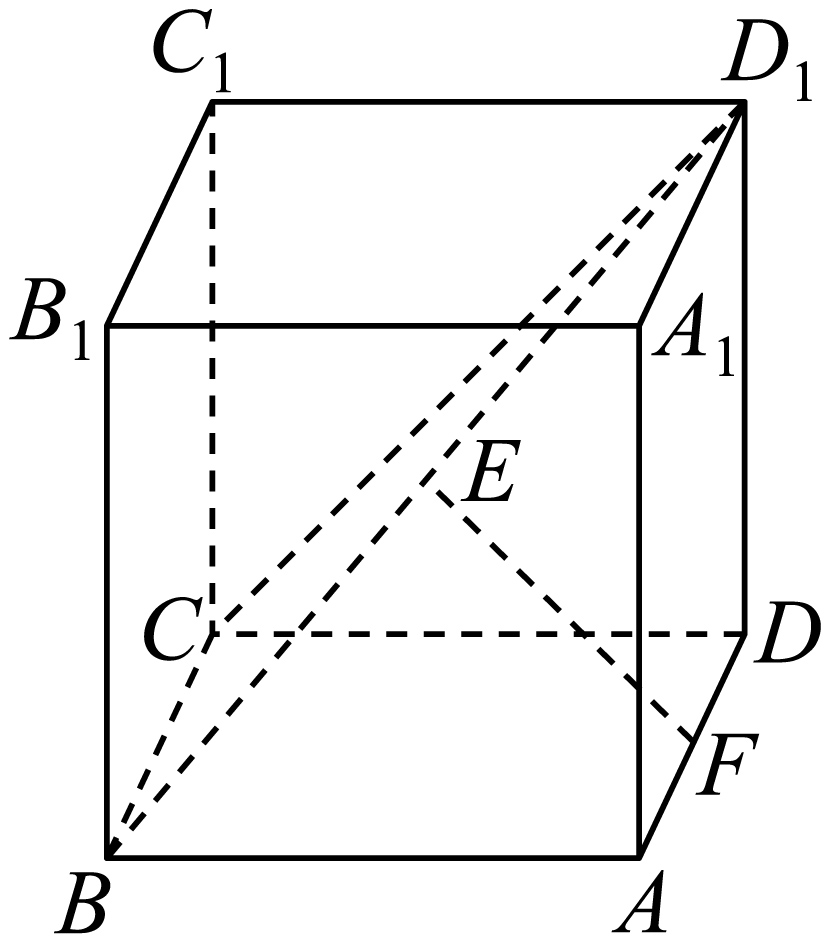
因为，所以四点共面，C错误；

，D错误.

故选：B

**题型三：证明异面直线垂直**

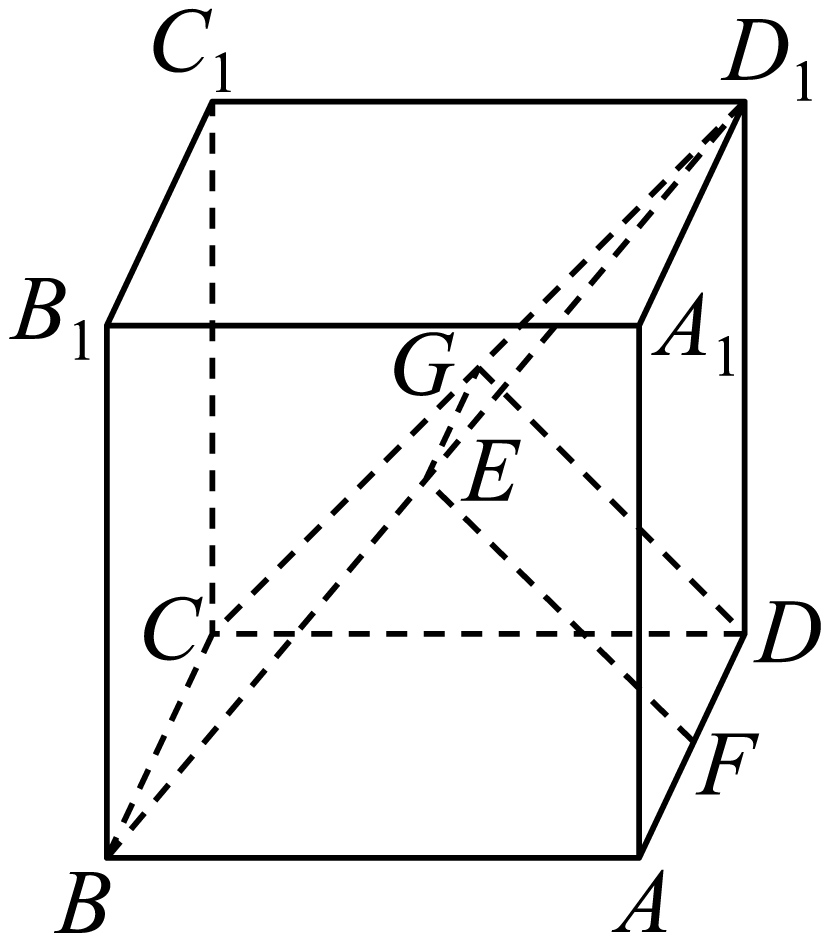
7．（2024高一·全国）如图，已知长方体*ABCD*－*A1B1C1D1*中，*A1A*＝*AB*，*E*，*F*分别是*BD1*和*AD*的中点，求证：*CD1*⊥*EF*.



【答案】证明见解析

【分析】取的中点，连接，，由三角形中位线定理以及平行四边形的性质可证明，可得直线与所成的角即为异面直线与所成的角，求出为直角即可.

【详解】如图，取*CD1*的中点*G*，



连接*EG*，*DG*.

∵*E*是*BD1*的中点，

∴*EG*∥*BC*，*EG*＝*BC*.∵*F*是*AD*的中点，且*AD*∥*BC*，*AD*＝*BC*，

∴*DF*∥*BC*，*DF*＝*BC*，

∴*EG*∥*DF*，*EG*＝*DF*，∴四边形*EFDG*是平行四边形，

∴*EF*∥*DG*，

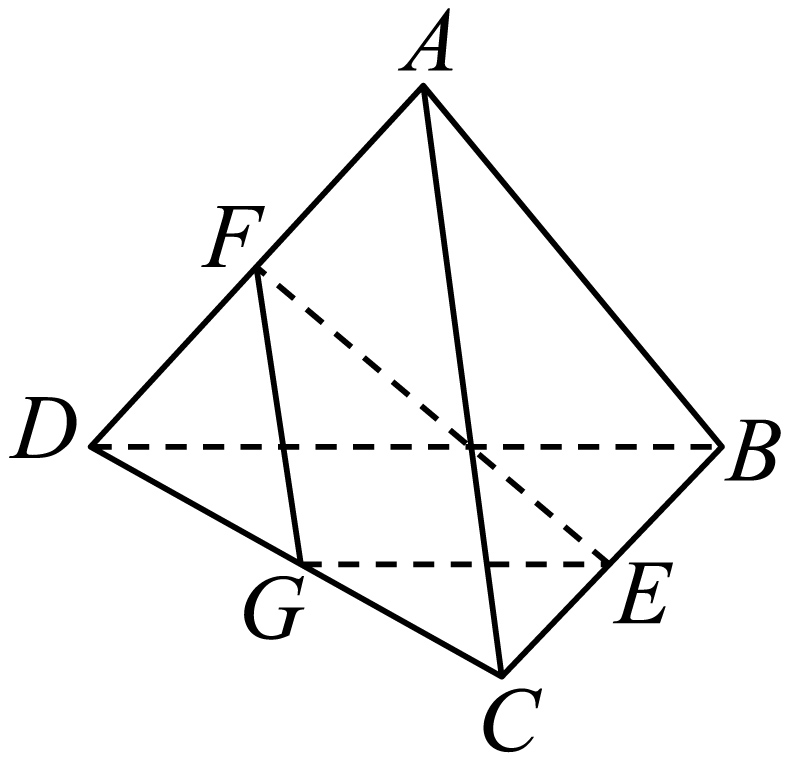
∴∠*DGD1*(或其补角)是异面直线*CD1*与*EF*所成的角.

又∵*A1A*＝*AB*，∴四边形*ABB1A1*、四边形*CDD1C1*都是正方形，又*G*为*CD1*的中点，∴*DG*⊥*CD1*，

∴∠*D1GD*＝90°，∴异面直线*CD1*与*EF*所成的角为90°.

所以*CD1*⊥*EF*.

8．（23-24高一·全国）空间四边形*ABCD*，*E*，*F*，*G*分别是*BC*，*AD*，*DC*的中点，*FG*＝2，*GE*＝，*EF*＝3.求证：*AC*⊥*BD*.



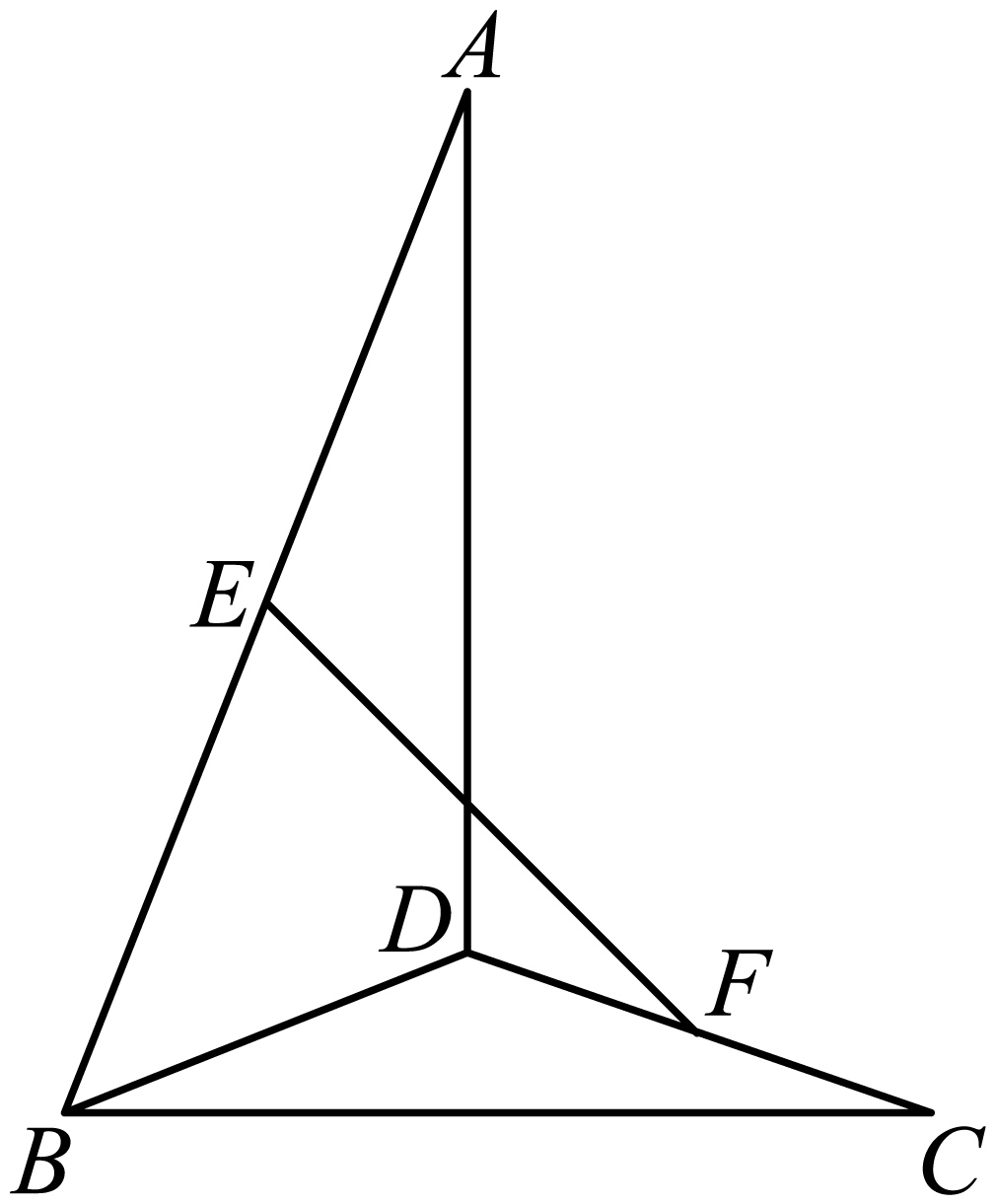
【答案】证明见解析

【分析】异面直线所成角为90°，则两直线垂直.

【详解】∵点*G*，*E*分别是*CD*，*BC*的中点，∴*GE**BD*，同理*GF**AC*.∴∠*FGE*或∠*FGE*的补角是异面直线*AC*与*BD*所成的角．

在△*EFG*中，∵*FG*＝2，*GE*＝，*EF*＝3，满足*FG2*＋*GE2*＝*EF2*，∴∠*FGE*＝90°.即异面直线*AC*与*BD*所成的角是90°.∴*AC*⊥*BD*.

9．（23-24高一·全国）如图所示，在空间四边形*ABCD*中，*AD*=*BC*=2，*E*，*F*分别是*AB*，*CD*的中点，*EF*=*．*求证：*AD*⊥*BC．*

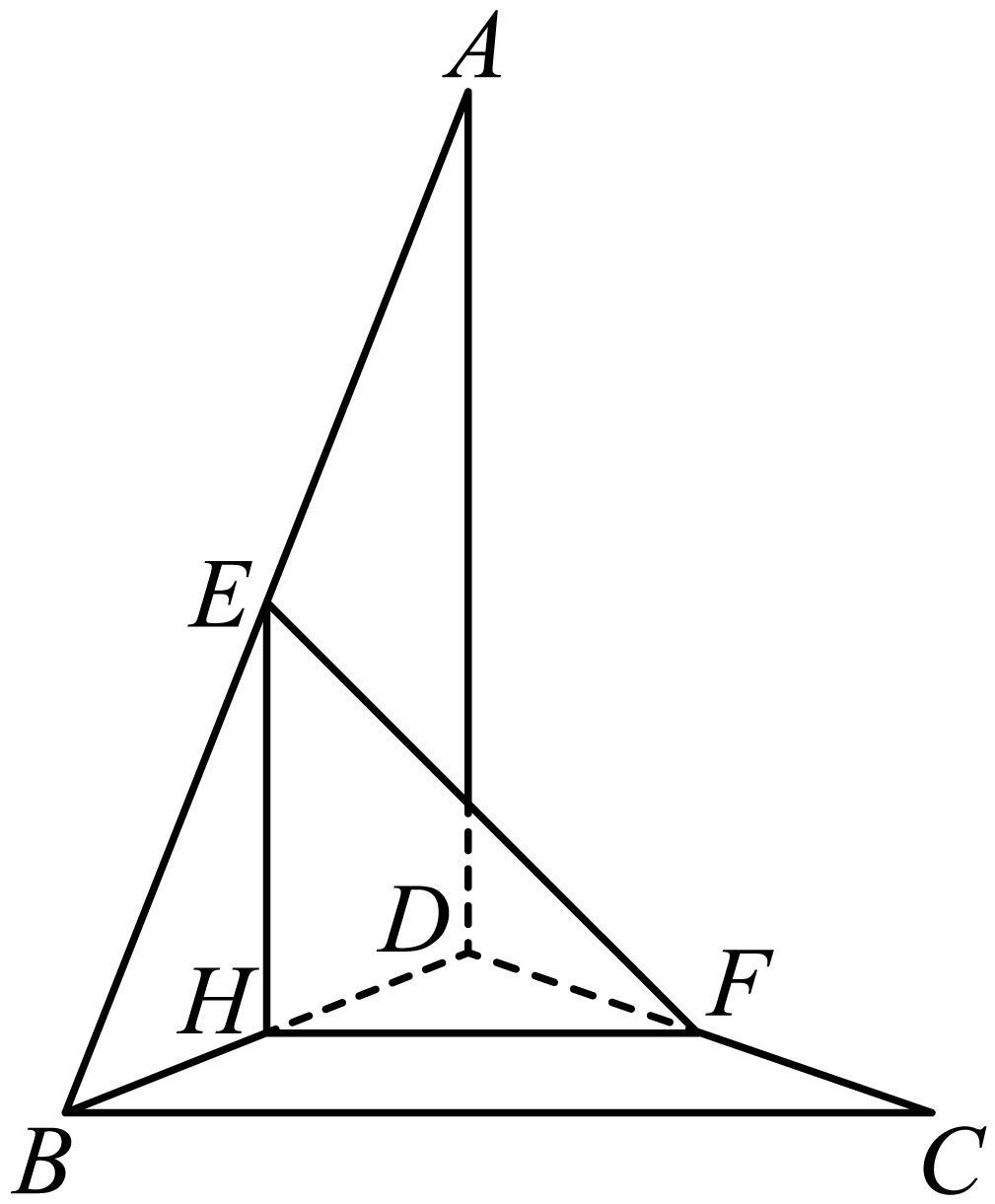


【答案】证明见解析

【分析】通过平移后再解三角形即可获得证明.

【详解】证明：如图所示，取*BD*的中点*H*，连接*EH*，*FH．*

因为*E*是*AB*的中点，且*AD*=2，



所以*EH*∥*AD*，*EH*=1*．*同理*FH*∥*BC*，*FH*=1*．*

所以∠*EHF*(或其补角)是异面直线*AD*，*BC*所成的角*．*

因为*EF*=，所以*EH2*+*FH2*=*EF2*，

所以*EFH*是等腰直角三角形，*EF*是斜边，

所以∠*EHF*=90°，即*AD*与*BC*所成的角是90°，

所以*AD*⊥*BC．*

**题型四：求异面直线所成的角**

10．（23-24高一下·江苏盐城）在正三棱柱中，，为棱的中点，则异面直线与所成角的余弦值为（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】记的中点为，连接，在等腰三角形中即可得解.

【详解】记的中点为，连接，

因为为棱的中点，所以，

易知，

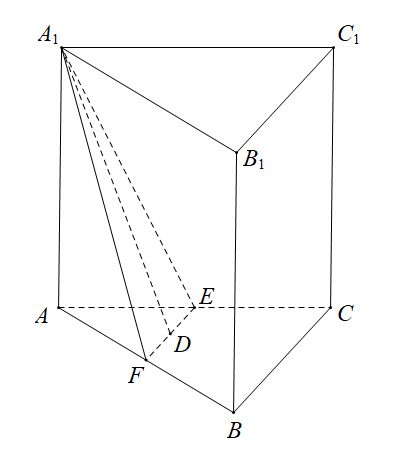
所以为等腰三角形，为锐角，

所以即为异面直线与所成角，

记的中点为，则，

即异面直线与所成角的余弦值为.

故选：D



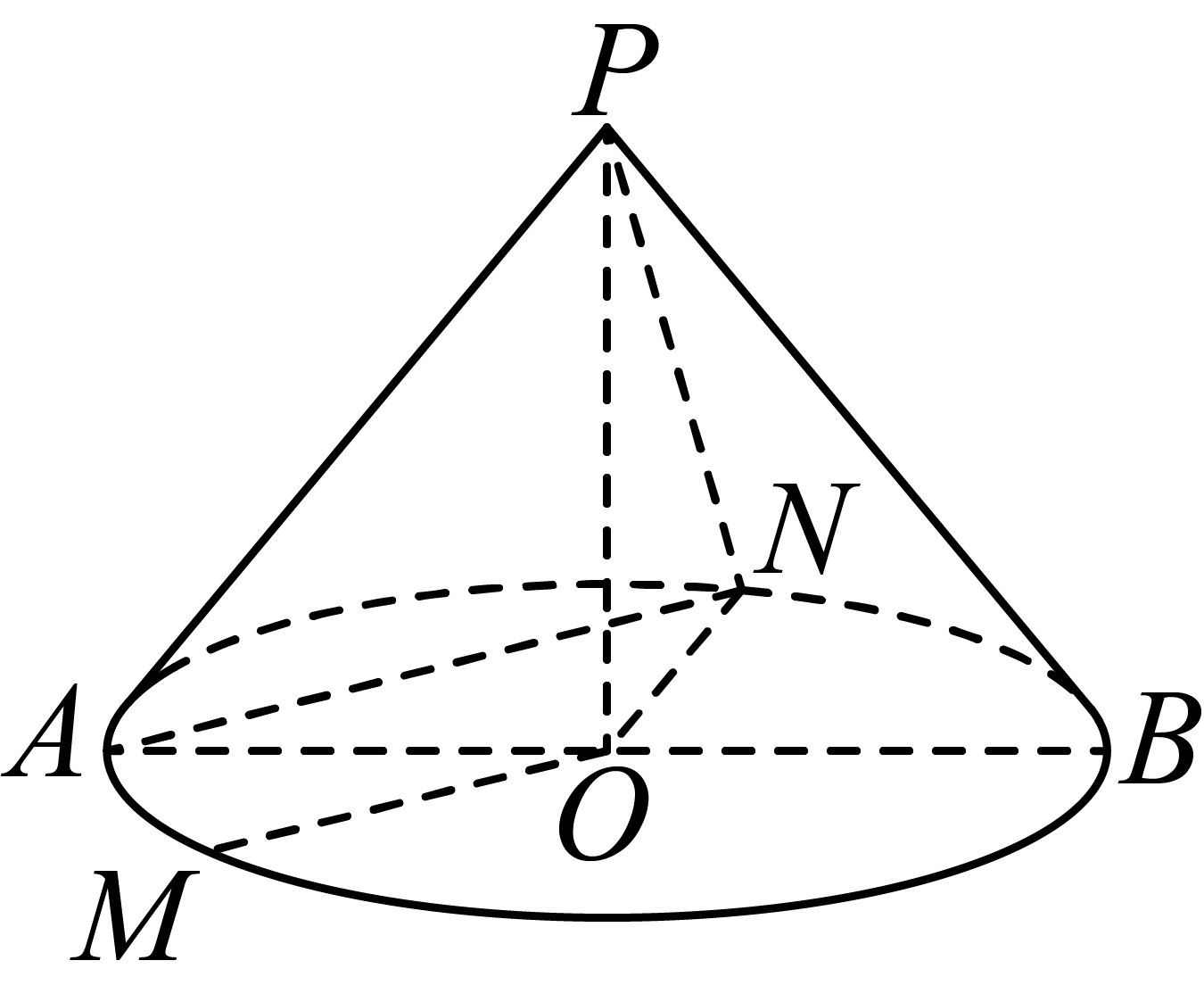
11．（23-24高一下·江苏南通·期中）在圆锥*PO*中，轴截面*PAB*为等腰直角三角形，*M*为底面圆*O*上一点，，则异面直线*OM*与*AP*所成角的余弦值为（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】首先得出异面直线*OM*与*AP*所成角即为（或其补角），在中利用余弦定理求解即可.

【详解】



如图，过点*A*作，交圆*O*于点*N*，连接*ON*，*PN*，

则即异面直线*OM*与*AP*所成角或其补角，

设 ,可知,

则，

因为轴截面*PAB*为等腰直角三角形，所以，

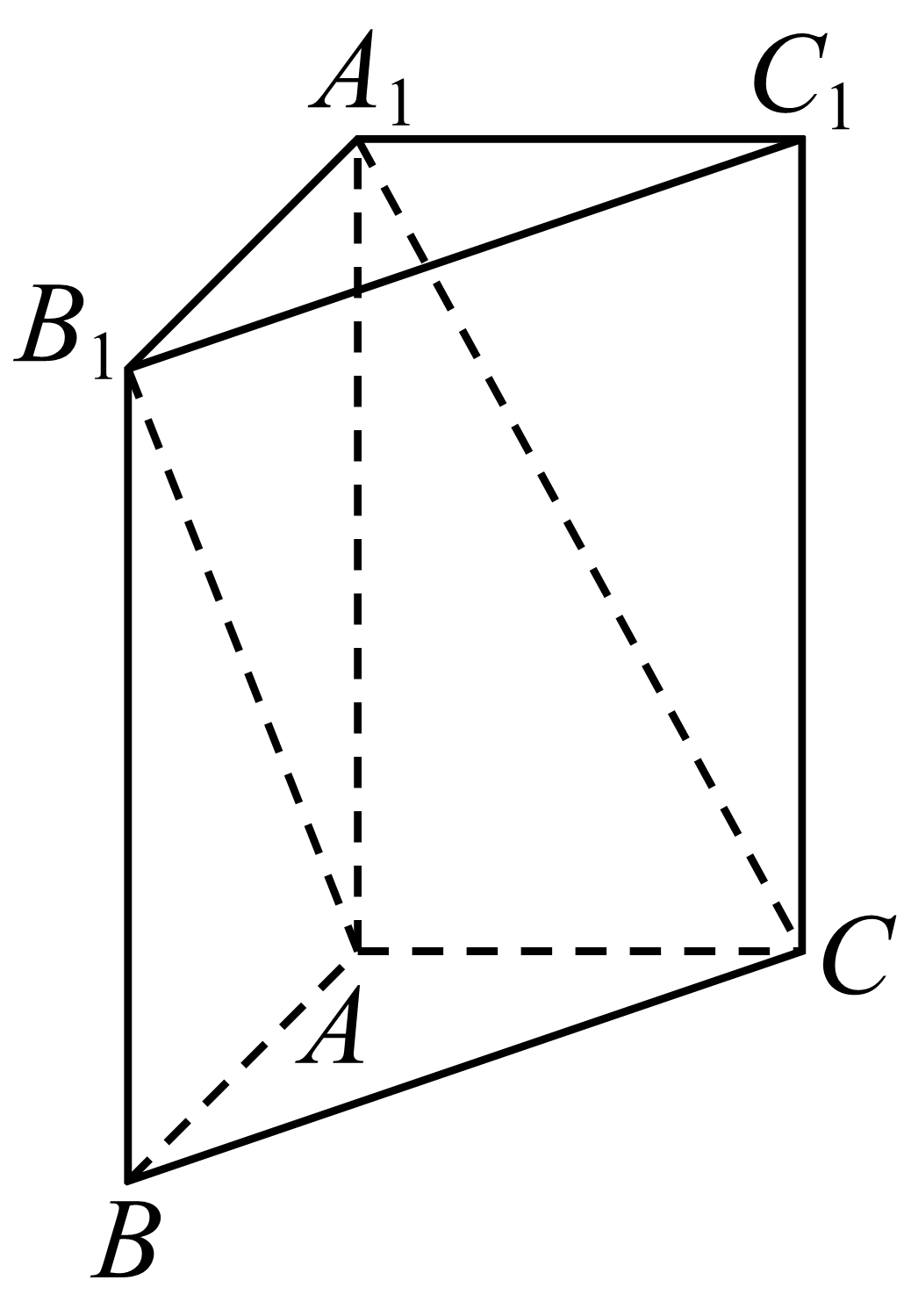
在中，由余弦定理得，

,

所以异面直线*OM*与*AP*所成角的余弦值为.

故选：A.

12．（2024·陕西西安·一模）如图，在直三棱柱中，为等腰直角三角形，且，则异面直线与所成角的正弦值为（    ）

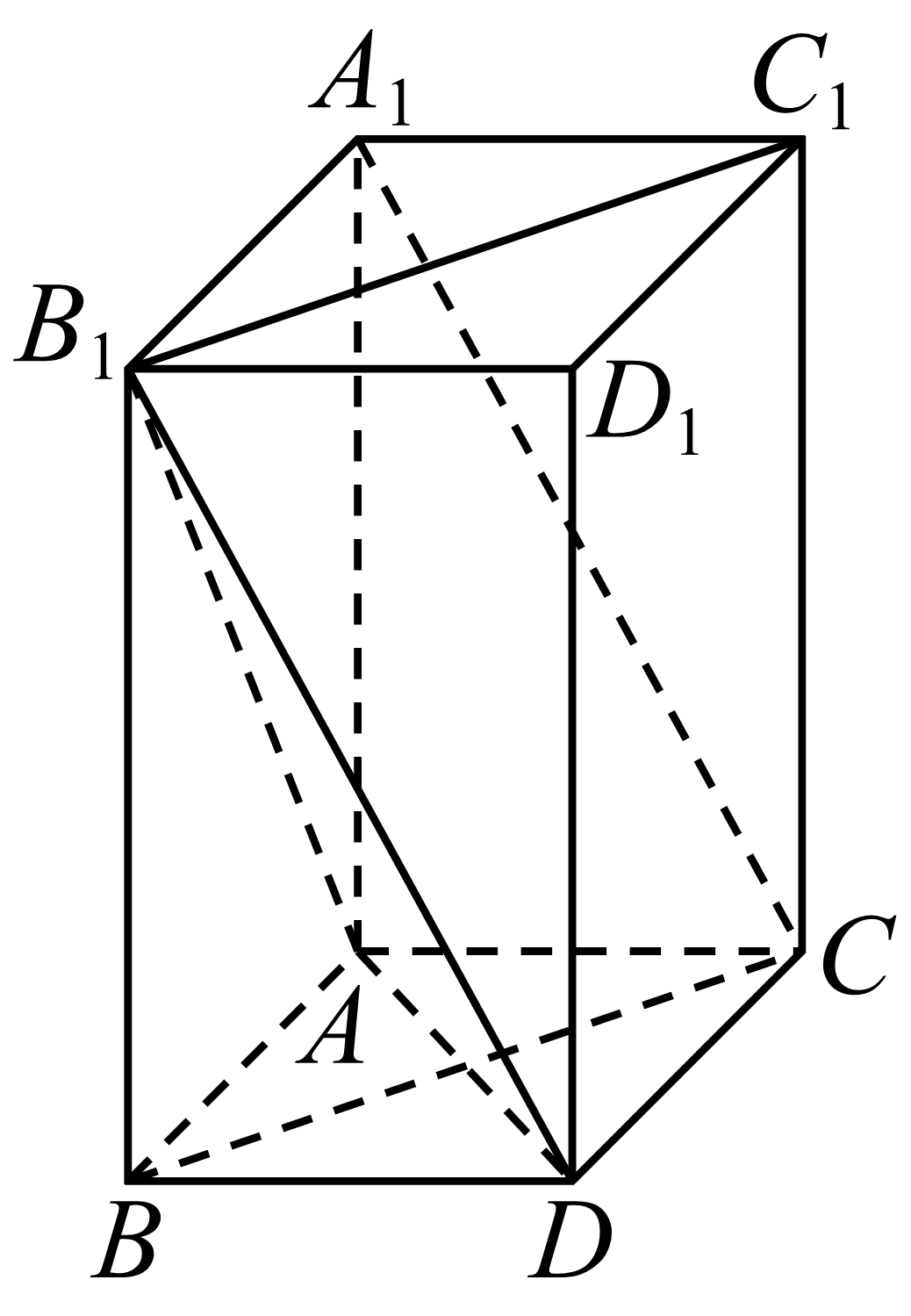


A． B． C． D．

【答案】B

【分析】先补形，再作出异面直线与所成角的平面角，然后结合余弦定理即可求解.

【详解】将直三棱柱补形为如图所示的正四棱柱：



连接、，则，

则异面直线与所成角的平面角为(或其补角)，

又，，

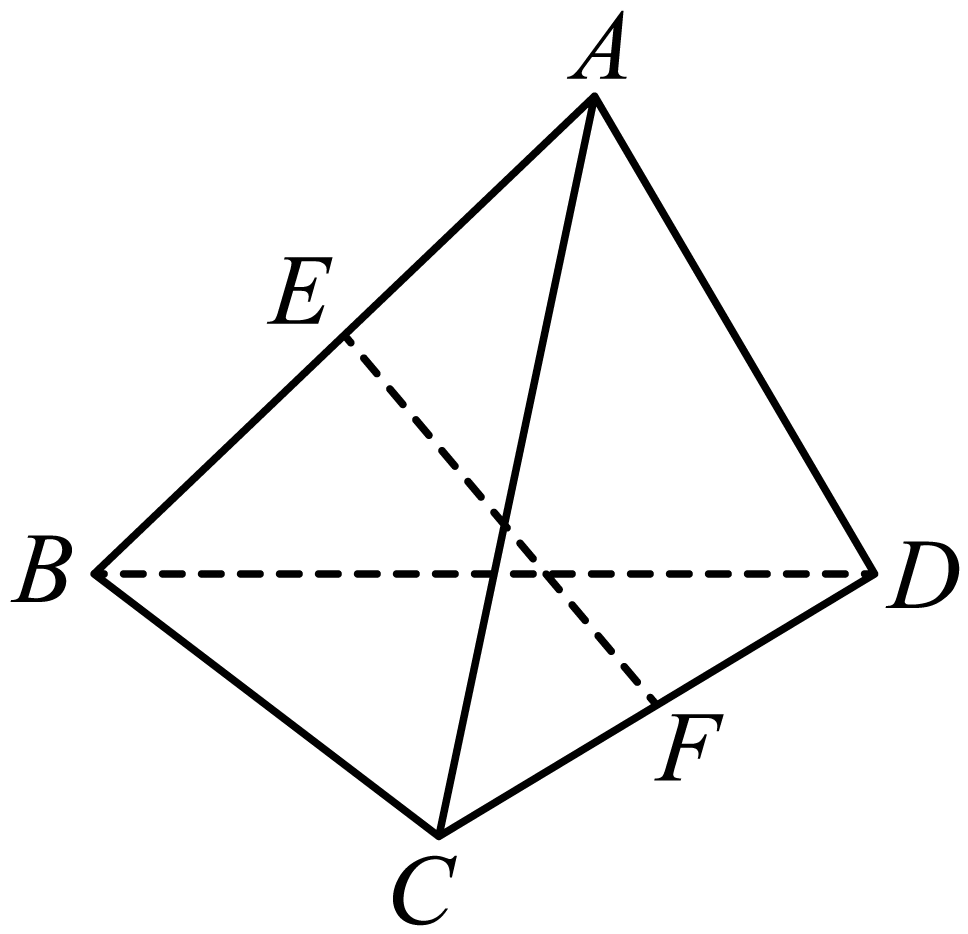
由余弦定理可得：，

所以，故B正确.

故选：B.

**题型五：异面直线所成的角求其他量**

13．（22-23高一下·陕西宝鸡·阶段练习）如图，在四面体中，、分别为、的中点，若、所成的角为，且，则的长为（    ）

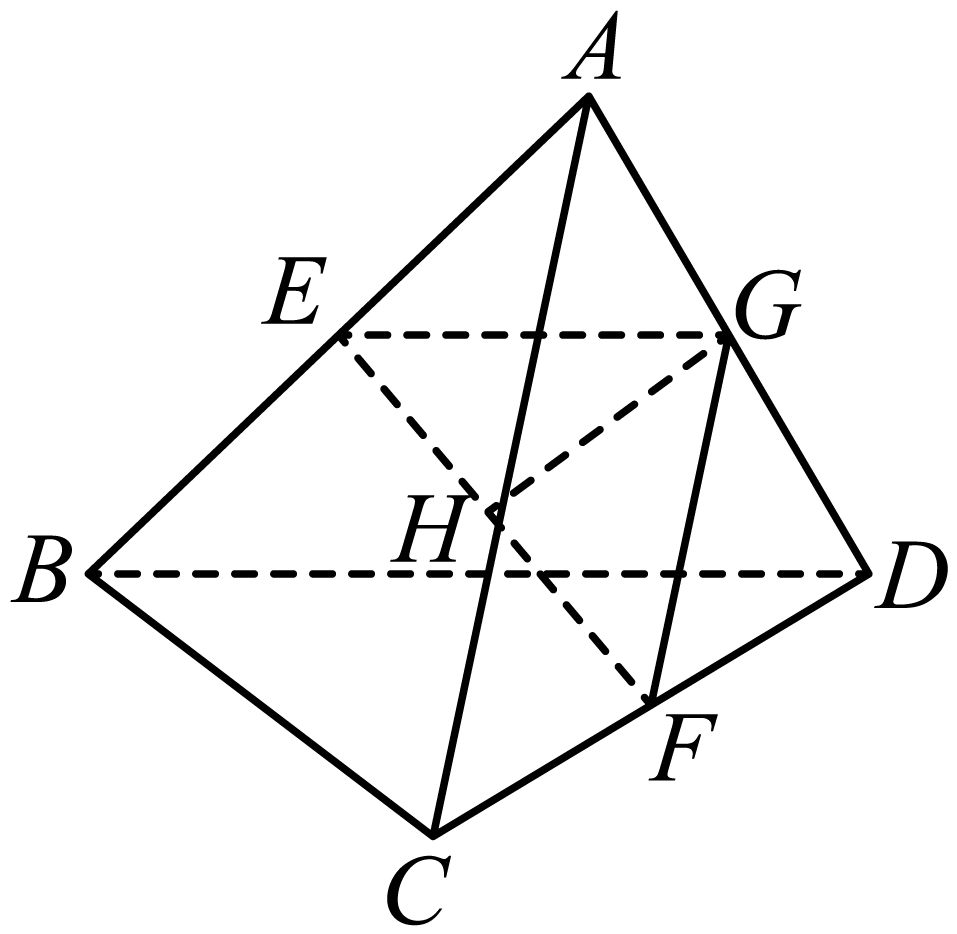


A． B． C． D．或

【答案】D

【分析】取线段的中点，连接、，分析可知异面直线、所成的角为或其补角，分、两种情况讨论，通过解，可得出的长.

【详解】取线段的中点，连接、，



因为、分别为、的中点，则且，

同理可得且，

所以，异面直线、所成的角为或其补角，

①若，则是边长为的等边三角形，故；

②若，因为，则为等腰三角形，且，

取的中点，则，且.

综上所述，或.

故选：D.

14．（21-22高一下·山东淄博·期末）在空间四边形中，，，，分别是，，，的中点．若，且与所成的角为，则的长为（    ）

A．1 B． C．1或 D．或

【答案】C

【分析】连接，可得或，求解三角形即可求出.

【详解】如图，连接，在中，因为为中点，所以，，

在中，因为为中点，所以，，

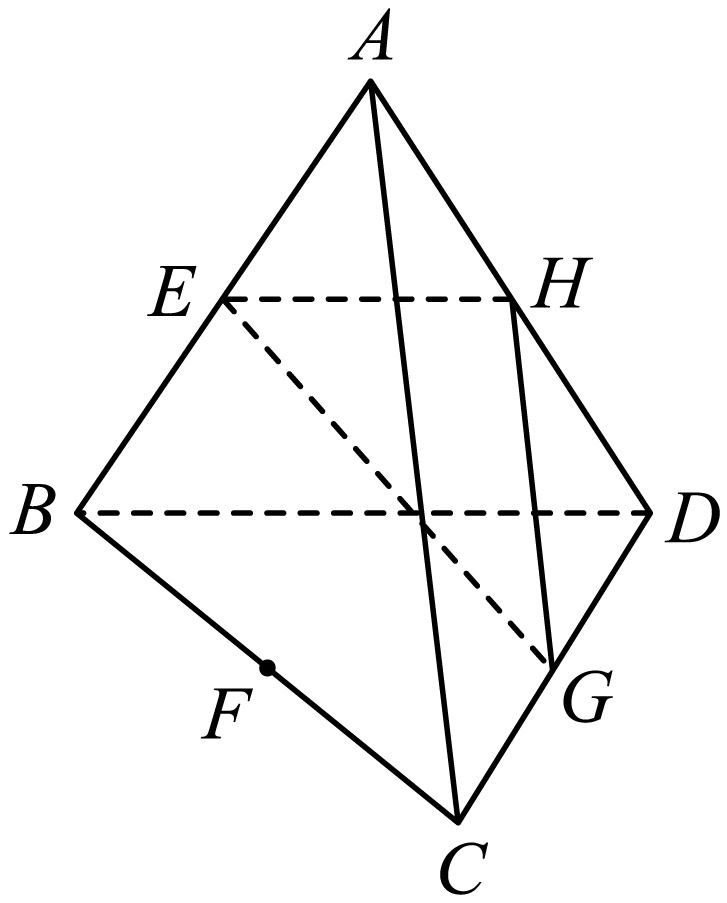
因为与所成的角为，所以或，

当时，为等边三角形，所以，

当，由余弦定理可得，即，

所以的长为1或.

故选：C.



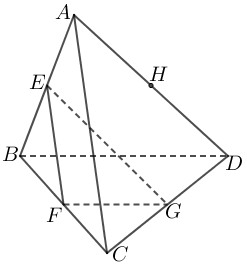
15．（21-22高一下·安徽六安·期中）在空间四边形中，*E*，*F*，*G*，*H*分别是，，，的中点，若，且与所成的角为60°，则的长为（    ）

A．1或 B．或 C．1或 D．或

【答案】C

【分析】连接*EF*，*FG*，*EG*，根据异面直线所成角的意义，在中分情况计算作答.

【详解】连接*EF*，*FG*，*EG*，如图，



依题意，，且，

因与所成的角为60°，则或，

当时，是正三角形，，

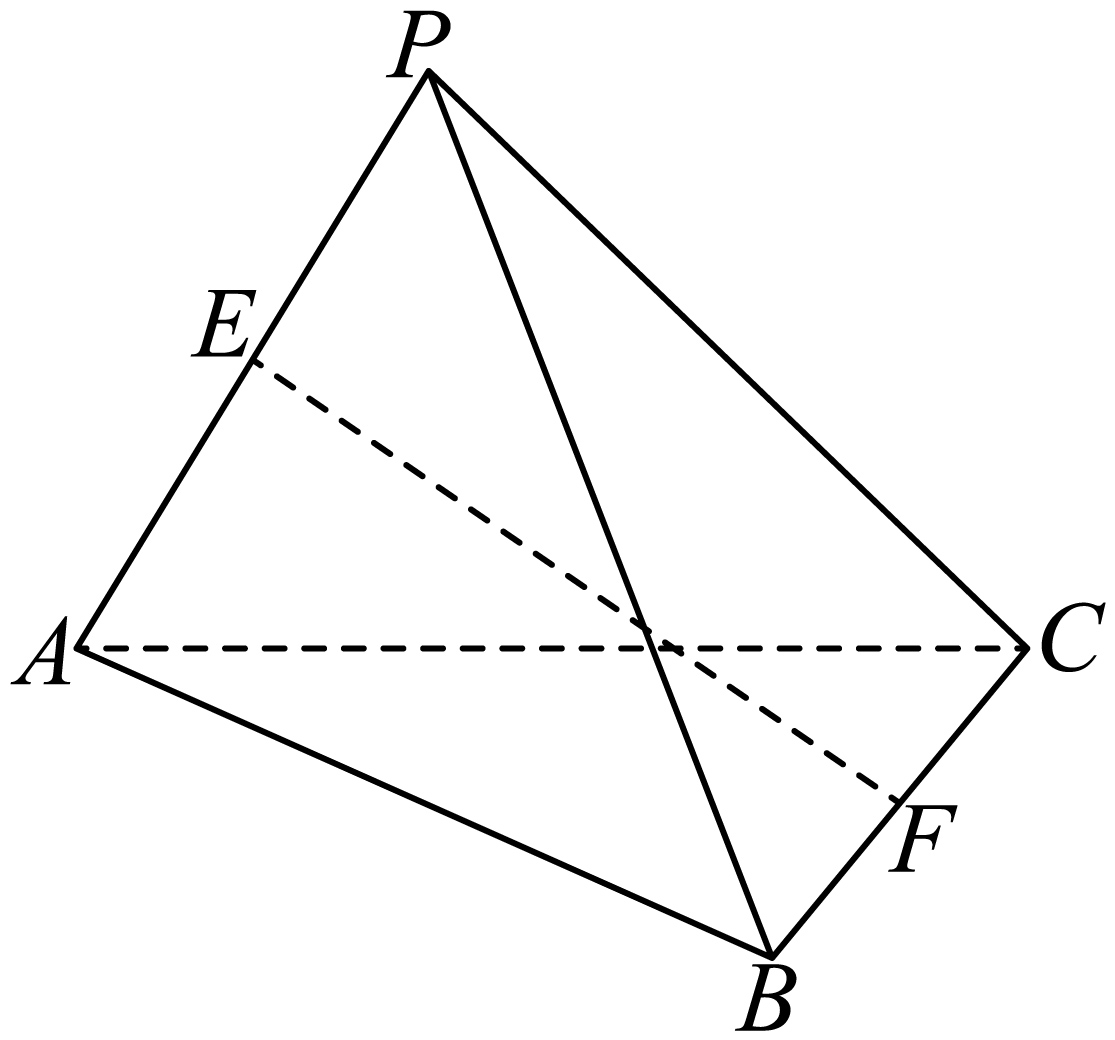
当时，，

所以的长为1或.

故选：C

**题型六：空间两条直线的综合问题**

16．（2024高三·全国）已知*P*为所在平面外一点，，，*E*，*F*分别是*PA*和*BC*的中点．



(1)求证：*EF*与*PC*是异面直线；

(2)求*EF*与*PC*所成的角．

【答案】(1)证明见解析；

(2).

【分析】（1）应用反证法设*EF*与*PC*不是异面直线，得到*A*、*B*、*C*、*P*在同一平面内，与已知矛盾，则结论可证；

（2）取*AC*的中点*G*，连接*EG*、*FG*，根据条件证明即为所求异面直线所成角．

【详解】（1）证明：用反证法，设*EF*与*PC*不是异面直线，

则*EF*与*PC*共面，从而*CF*与*PE*共面，即*AP*与*BC*共面，

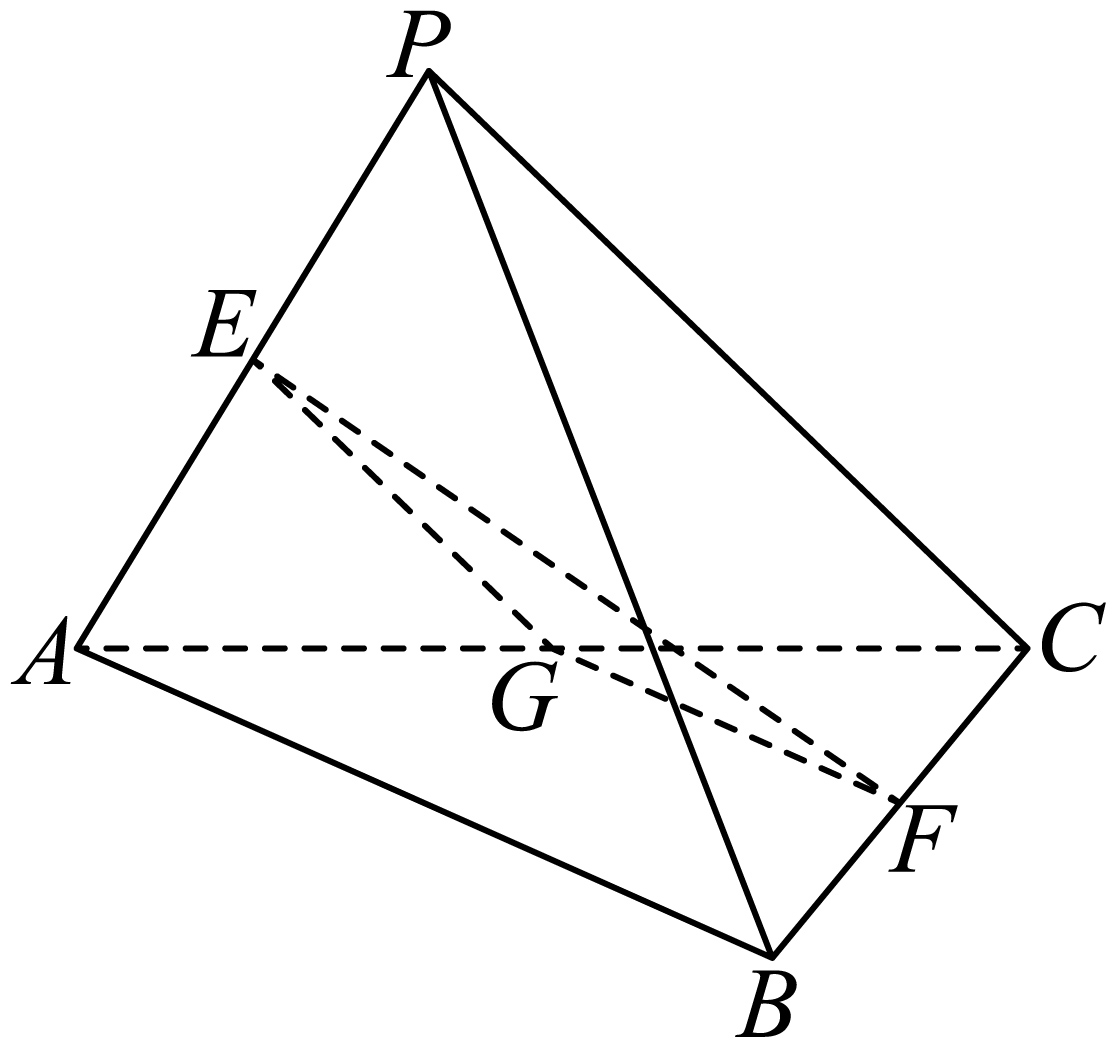
∴*A*、*B*、*C*、*P*在同一平面内，

这与*P*是所在平面外的一点相矛盾．

故直线*EF*与*BD*是异面直线．

（2）解：取*AC*的中点*G*，连接*EG*、*FG*，

由于*E*、*F*分别是*PA*、*BC*的中点，



则，且，，

∴相交直线*EF*与*EG*所成的锐角或直角即为异面直线*EF*与*PC*所成的角．

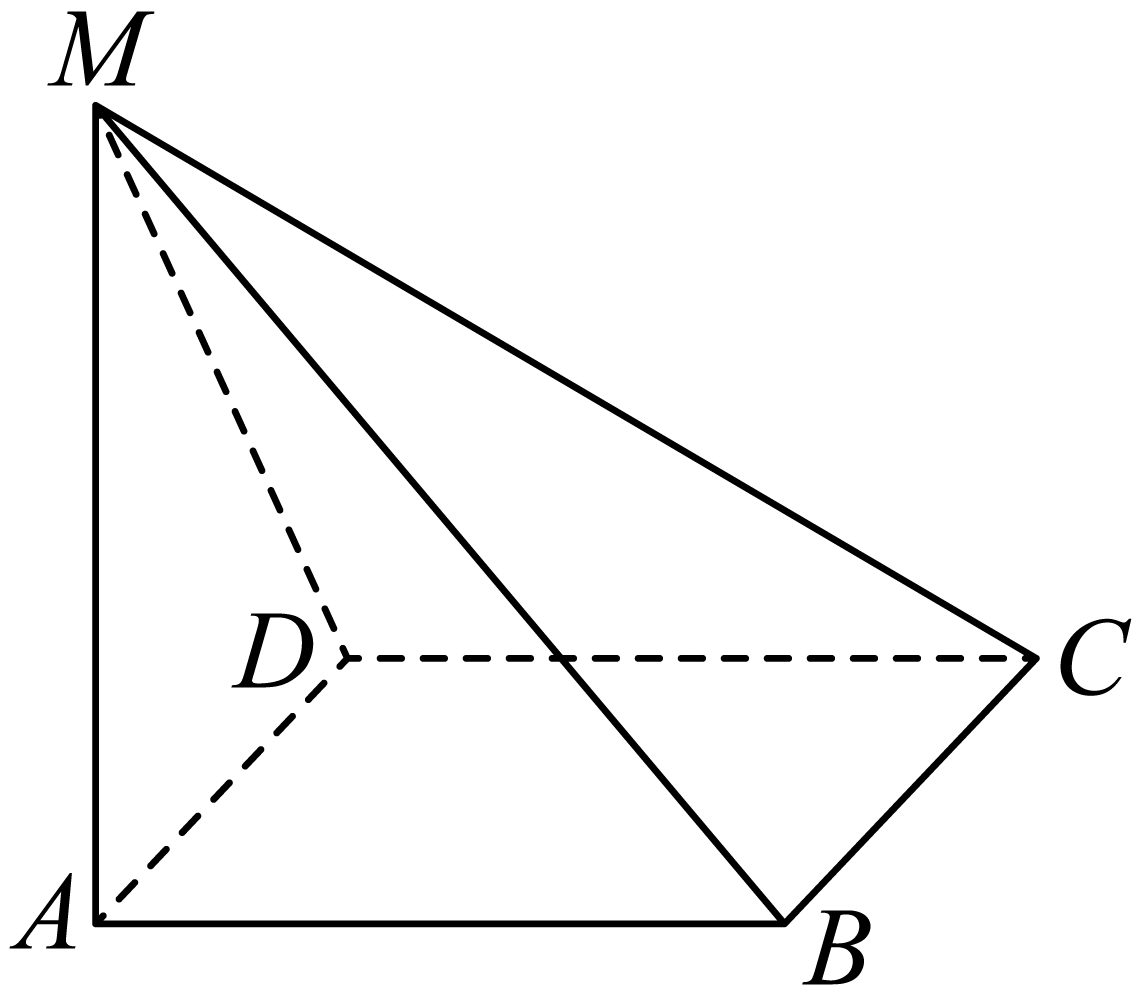
由，，

可得，，

故在等腰中，有，

即异面直线*EF*与*PC*所成的角为.

17．（23-24高二上·黑龙江鸡西·期末）如图，平面，四边形是正方形，且，试求：



(1)点到的距离；

(2)求异面直线与所成的角.

【答案】(1)

(2)

【分析】（1）根据垂直关系可得三角形边长，即可判断为等边三角形，根据等边三角形的性质即可求解，

（2）根据异面直线所成角的几何法求解角，即可利用三角形的性质求解.

【详解】（1）由于平面，平面，所以，

,四边形是正方形,

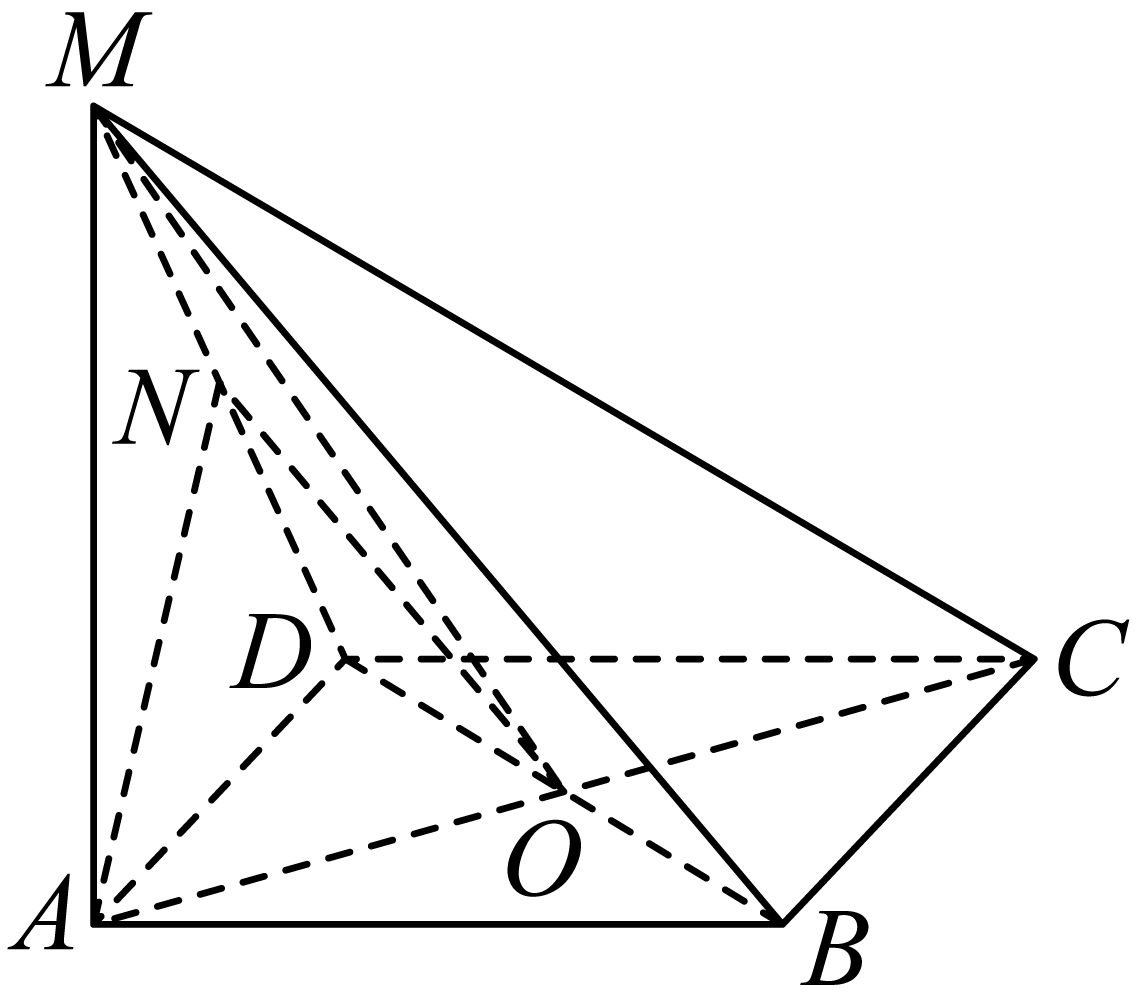
所以,

又，

连接相交于，

所以为边长为的等边三角形，所以,

故到的距离为,



（2）取的中点为，连接,

由于是的中点，所以,

故即为直线与所成的角或其补角，

由于，,,

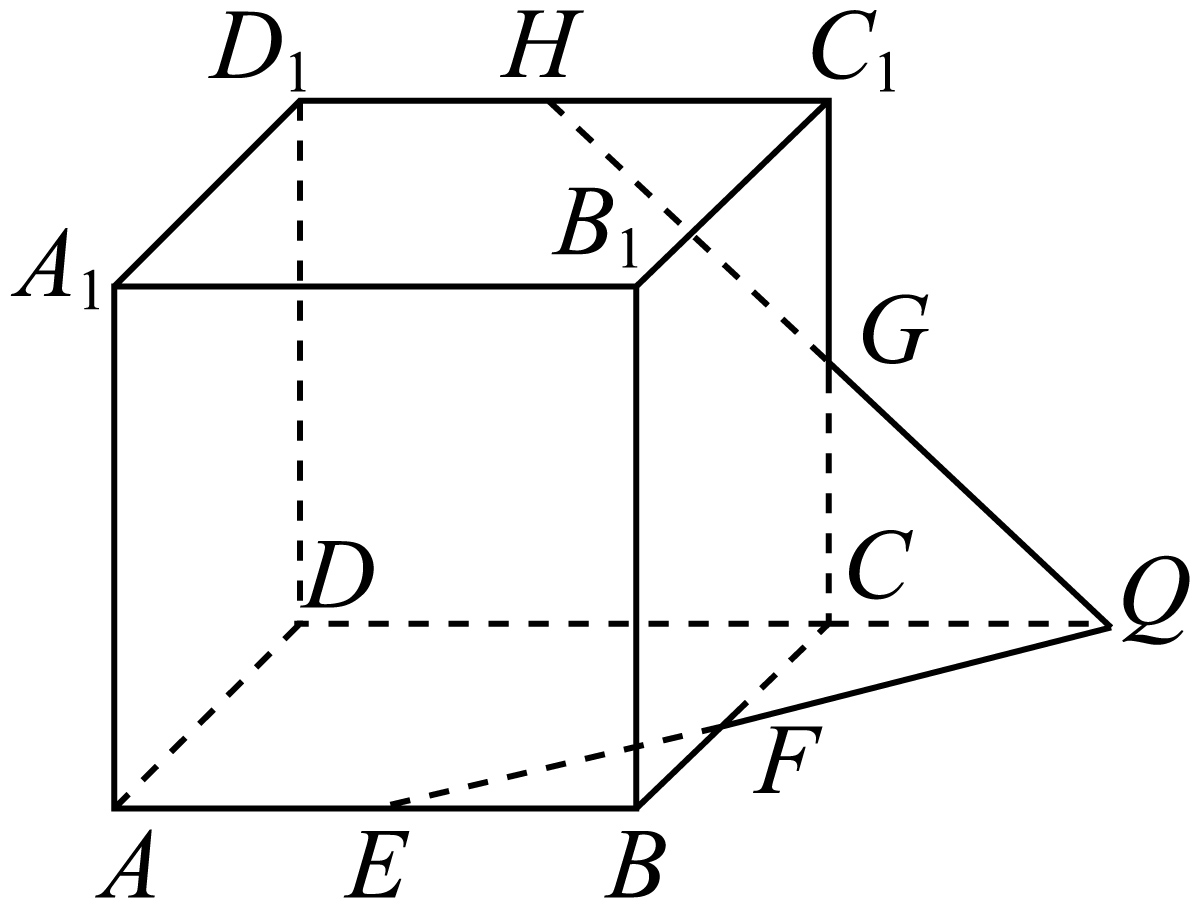
所以为等边三角形，所以,

故直线与所成的角为，

18．（23-24高二上·上海·期中）如图，已知分别是正方体的棱的中点，且与相交于点．

(1)求证：点*Q*在直线*DC*上；

(2)求异面直线与所成角的大小．



【答案】(1)证明详见解析

(2)

【分析】（1）通过证明在平面与平面的交线上，来证得在直线上.

（2）判断出异面直线与所成角并计算出角的大小.

【详解】（1）平面平面，

由于平面，平面，

所以，也即点*Q*在直线*DC*上.

（2）根据正方体的性质可知，

所以异面直线与所成角为，

由于分别是的中点，

所以，

所以异面直线与所成角的大小为.

**【双基达标】**

**一、单选题**

1．（23-24高一下·江苏扬州）下列说法正确的是（    ）

A．若空间两直线没有公共点，则这两条直线异面；

B．与两条异面直线都相交的两直线可能是异面直线，也可能是相交直线；

C．空间三点确定一个平面；

D．过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线垂直．

【答案】B

【分析】根据空间中直线与直线位置关系可判断A；根据异面直线的概念可判断B；根据平面的基本性质可判断C；根据空间异面直线所成角可判断D.

【详解】对A，若空间两直线没有公共点，则这两条直线平行或异面，故A错误；

对B，与两条异面直线都相交的直线如果是交于不同的四个点，则两直线为异面直线，若交于三个点，则两直线为相交直线，故B正确；

对C，由平面的基本性质可知，空间不共线的三点可以确定一个平面，故C错误；

对D，过直线外一点，有无数条直线与已知直线垂直，故D错误；

故选：B.

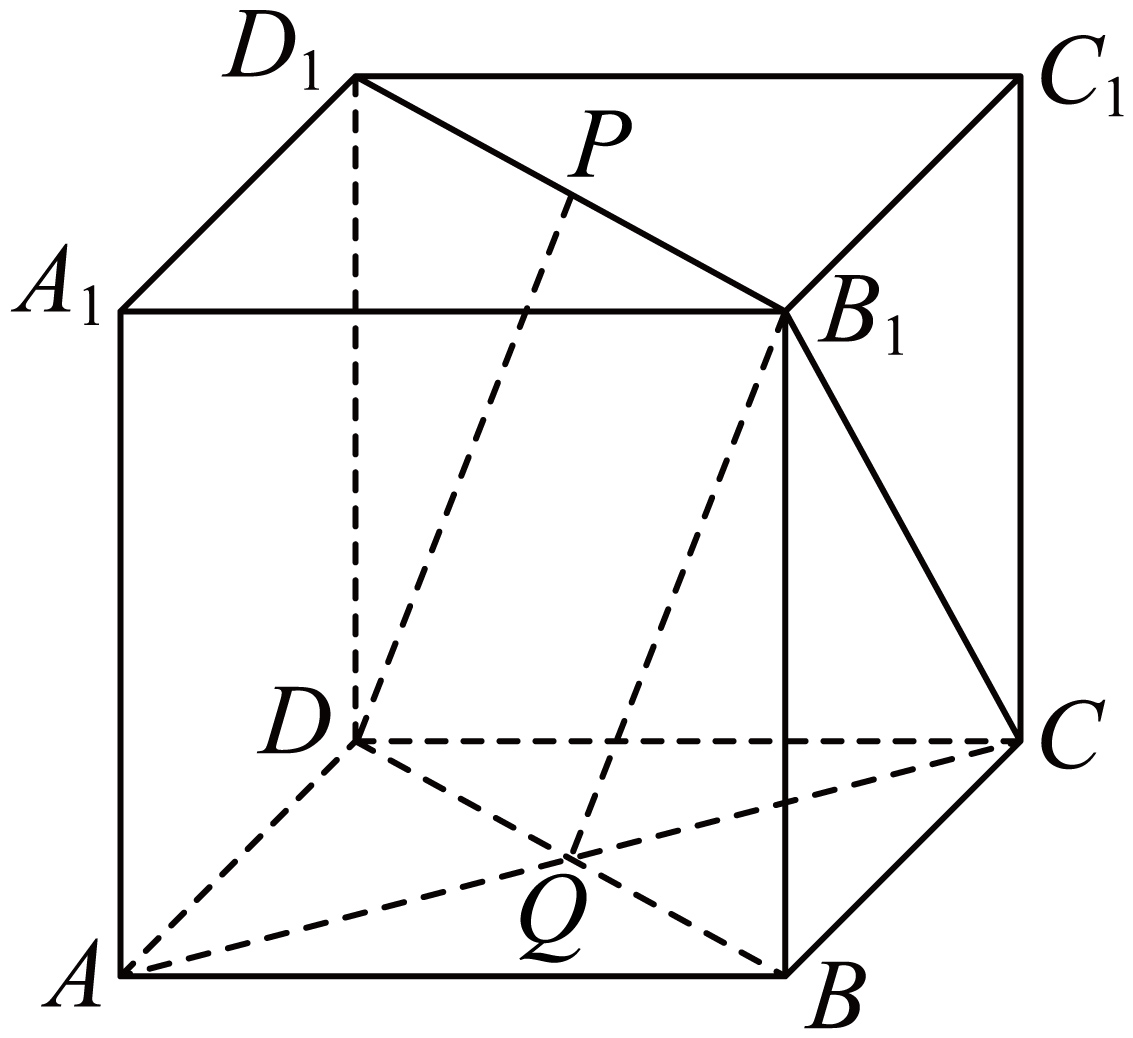
2．（23-24高一下·江苏无锡·期中）正方体中，为的中点，则直线与直线所成角为（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】利用正方体的性质，通过平行至相交直线所成角，再利用余弦定理即可求解.

【详解】



如图，设为底面中心，为上底面中心，易得，

所以异面直线与所成的角就是或其补角，

设正方体的棱长为，可得，，，

由余弦定理得：，

所以，异面直线与所成的角是，

故选：C.

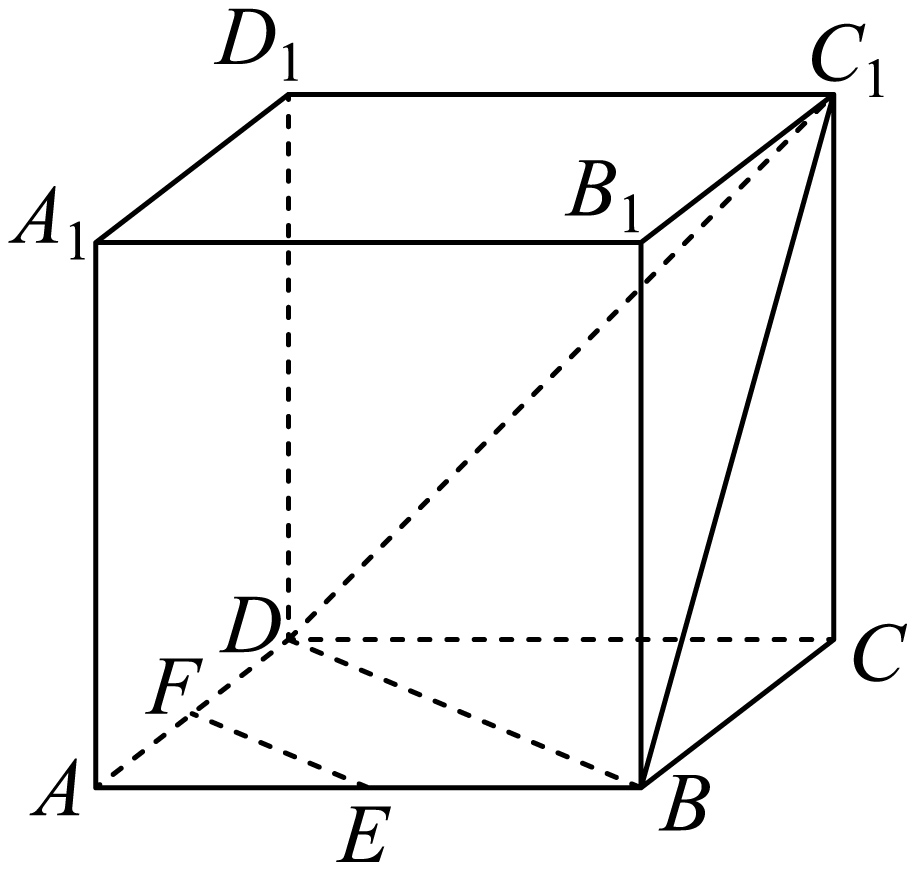
3．（23-24高一下·江苏镇江·期末）正方体中，，分别为棱，中点，则与所成角为（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】由题意画出图形，数形结合可得答案.

【详解】如图，连接，，，

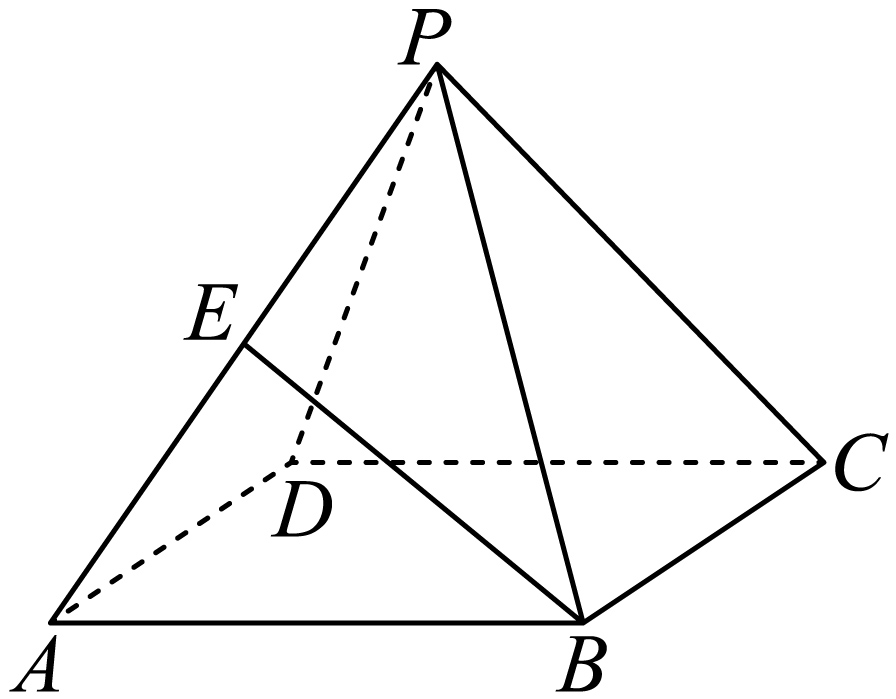


因为，分别为棱，中点，所以，所以为与所成角，因为在正方体中，，

所以为等边三角形，所以，

故选：C

4．（23-24高二下·山东烟台·阶段练习）如图，已知正四棱锥的所有棱长均为2，为棱的中点，则异面直线与所成角的余弦值为（    ）.

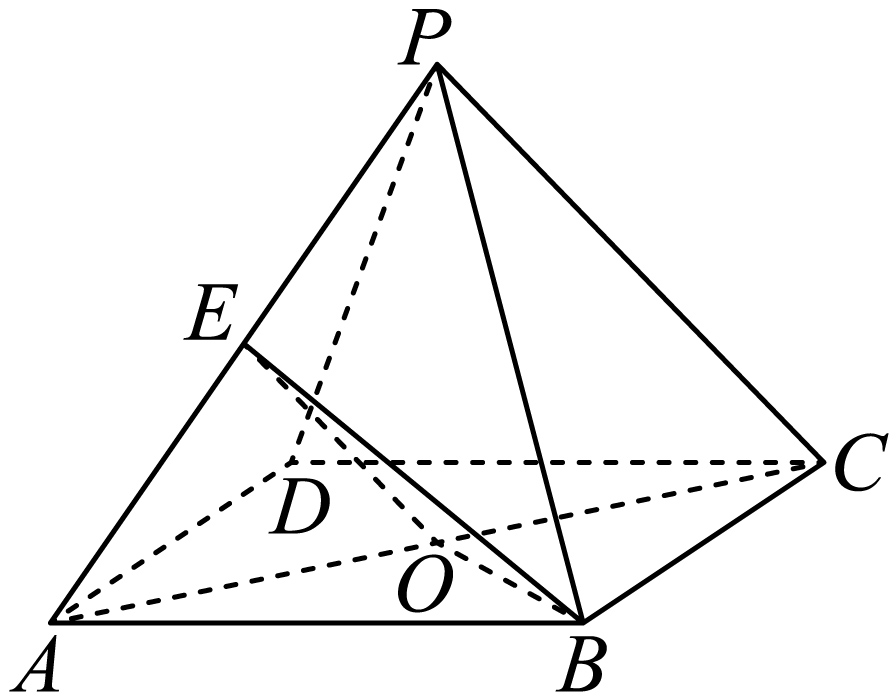


A． B． C． D．

【答案】C

【分析】连接，取的中点，连接，，由题意可知，即异面直线与所成角为或其补角，结合余弦定理求解即可.

【详解】



连接，取的中点，连接，，

因为为棱的中点，所以，

即异面直线与所成角为或其补角，

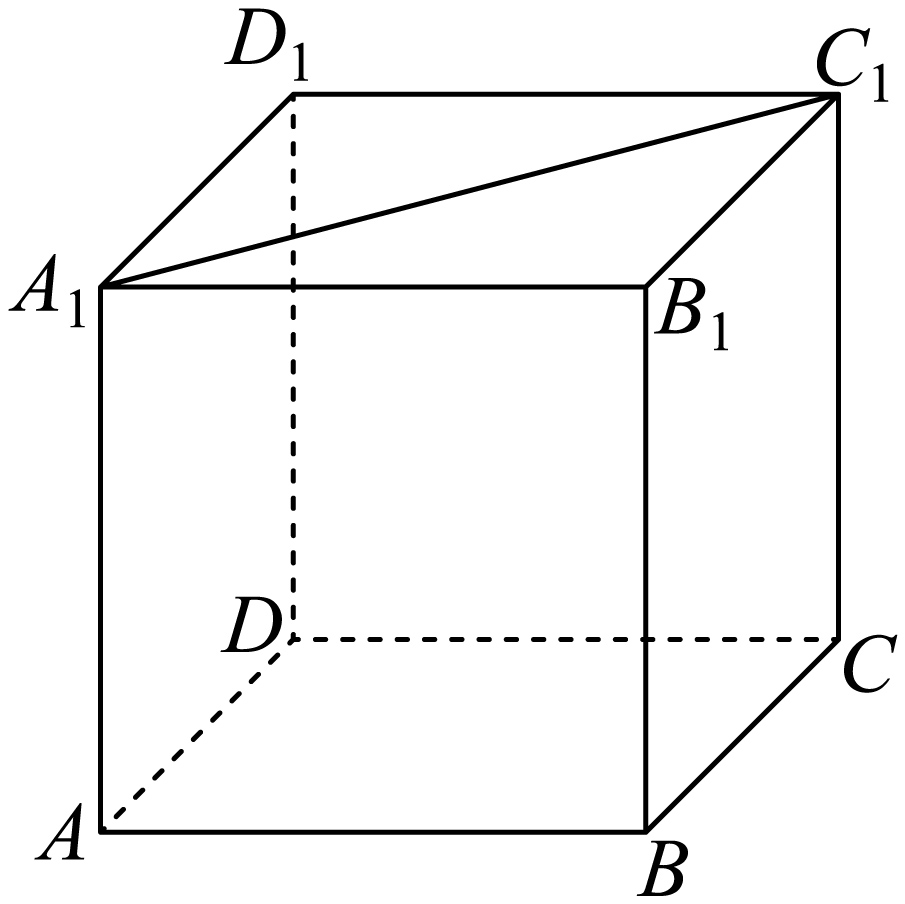
在中，，，，

则，

所以异面直线与所成角的余弦值为.

故选：.

5．（2023·上海·模拟预测）如图所示，在正方体中，点为线段上的动点，则下列直线中，始终与直线异面的是（   ）



A． B． C． D．

【答案】B

【分析】根据异面直线的定义一一判断即可.

【详解】由正方体的性质易知当为的中点时，为的中点，

而，所以共面，则、在平面上，故A不符题意；

因为，即共面，

易知平面，而平面，，，

故与异面，故B符合题意；

当重合时，易知，

则四边形是平行四边形，则此时，故C不符合题意；

当重合时，显然，相交，故D不符合题意.

故选：B.

6．（2024高三·全国·专题练习）下列命题中，真命题的个数是（　　）

① 分别在两个平面内的两条直线是异面直线；

② 和两条异面直线都垂直的直线有且只有一条；

③ 和两条异面直线都相交的两条直线必定异面；

④ 与同一条直线都异面的两条直线也是异面直线．

A．0 B．1 C．2 D．3

【答案】A

【详解】解：①不正确，分别在两个平面内的两条直线可以平行，也可以相交．

②不正确，和两条异面直线都垂直的直线有无数多条．

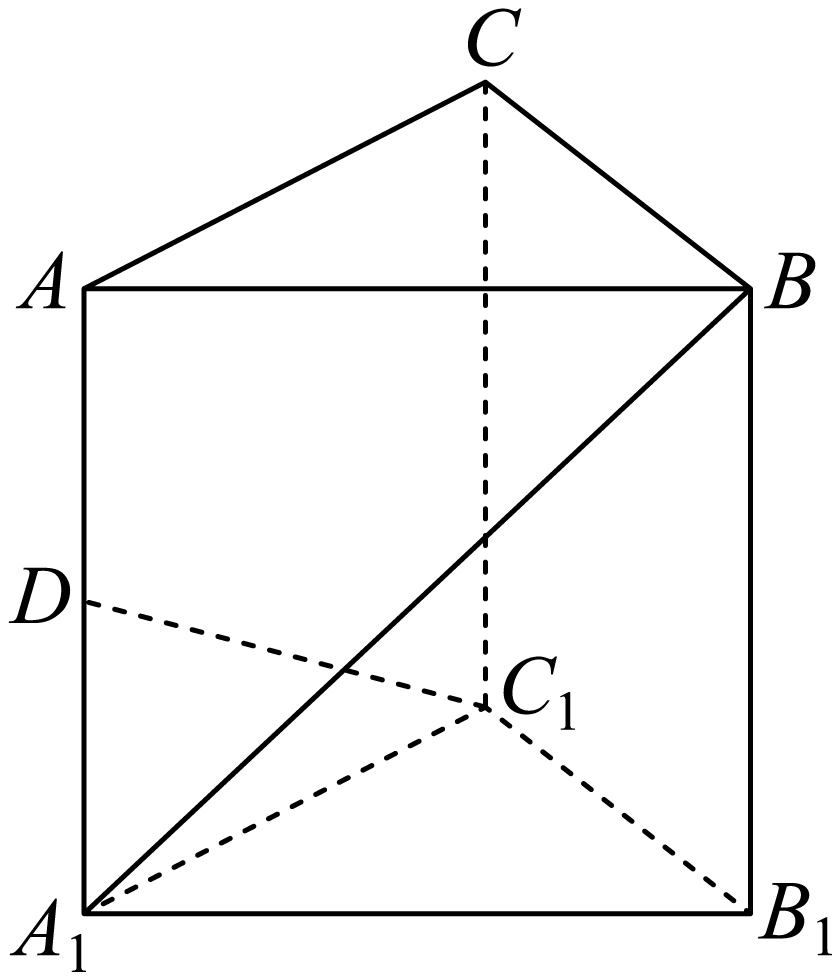
③不正确，和两条异面直线都相交的两条直线可以是相交直线，如这2条直线的交点在2条异面直线中的某一条上时．

④不正确，若*a*与*b*是异面直线，*b*与*c*是异面直线，则*a*与*c*有可能平行，也有可能相交．

综上，真命题的个数为0，

故选：

7．（23-24高二上·山西吕梁·期末）如图，正三棱柱的各棱长相等，为的中点，则异面直线与所成角的余弦值为（　　）



A． B． C． D．0

【答案】D

【分析】取中点，证得平面，得到，再证得，从而证得平面，得到，即可求解.

【详解】取中点，因为，可得，

又因为平面，且平面，所以，

因为，且平面，所以平面，

又因为平面，所以，

在正方形中，分别为的中点，

设可得，

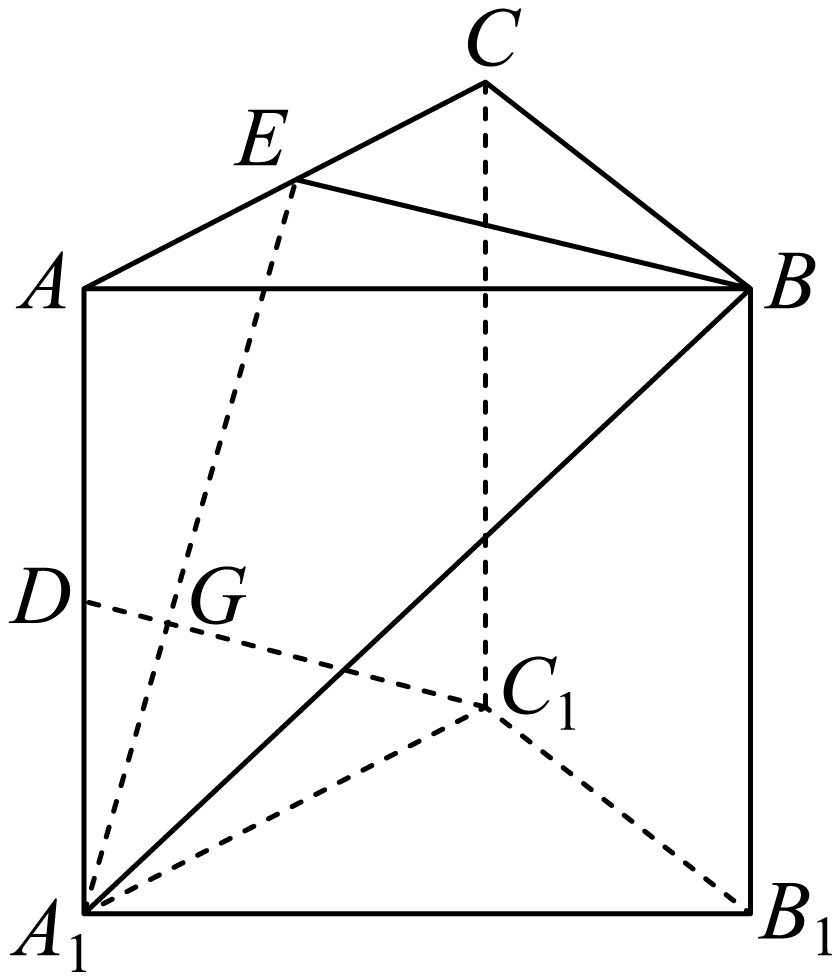
可得，所以，

所以，即，

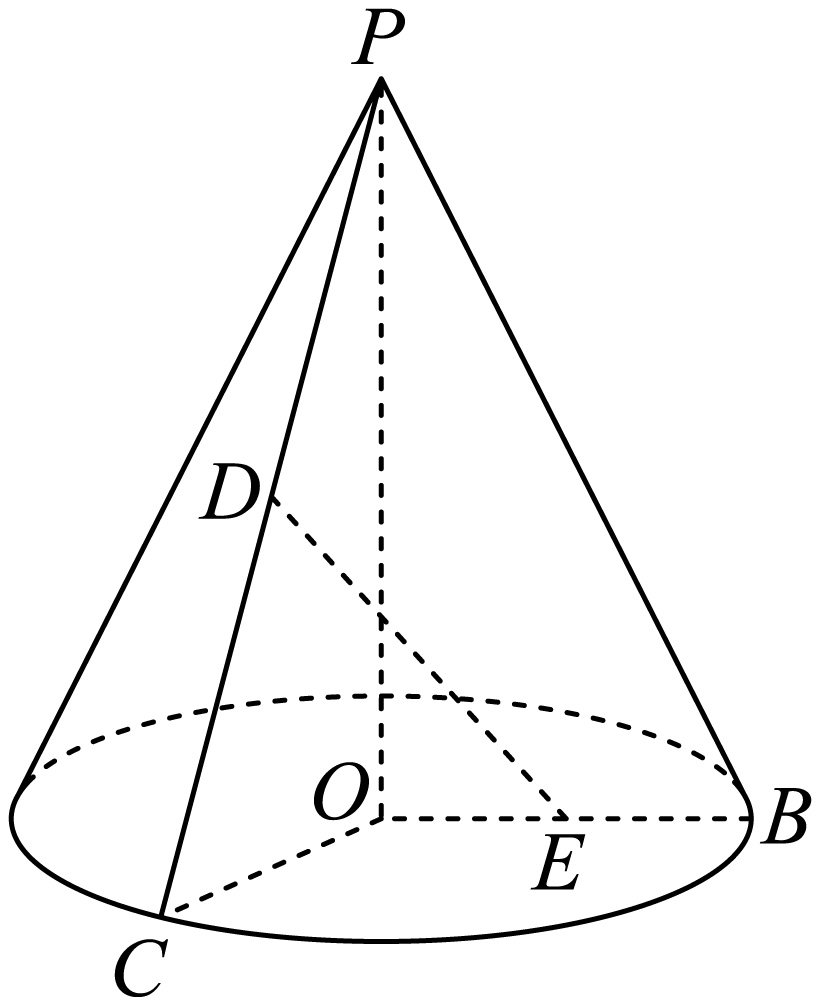
因为且平面，所以平面，

又因为平面，所以，所以异面直线与所成的角为.

故选：D.



8．（2024·全国·模拟预测）如图,在圆锥中,,为圆上的点,且,,若为的中点,为的中点,则异面直线与所成角的余弦值为（    ）



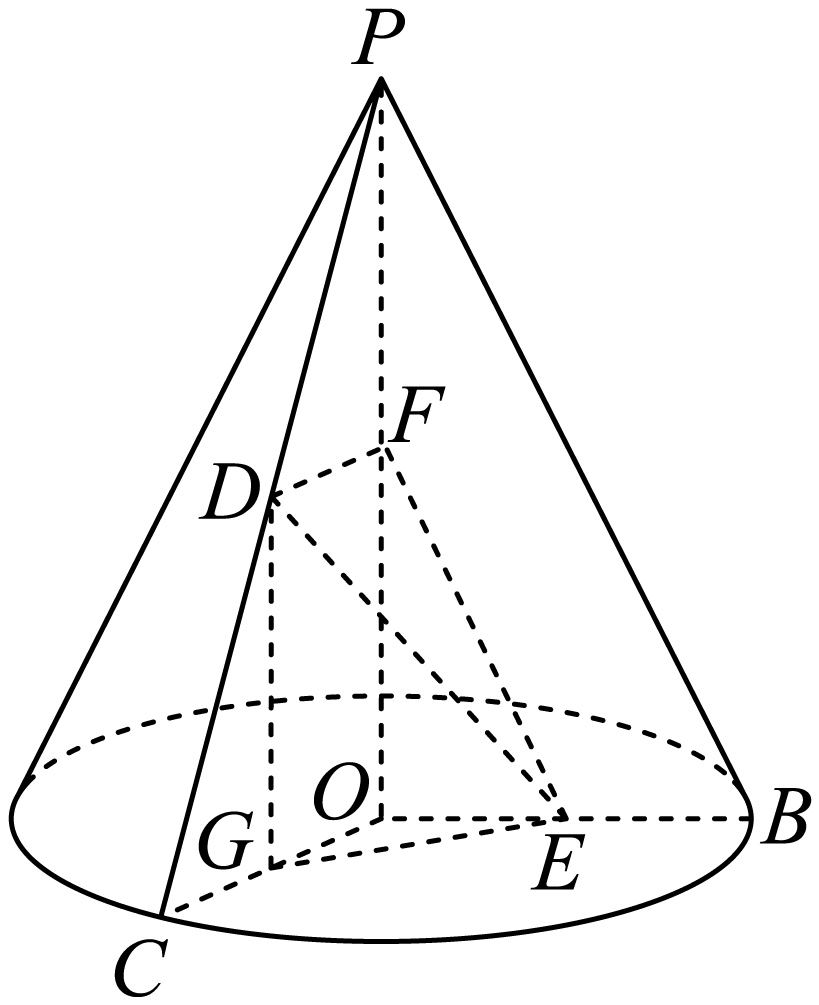
A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】首先作辅助线,找到异面直线所成的角或其补角即,然后找线面位置关系,求相关线段长,再利用余弦定理求解即可.

【详解】如图,取的中点,取的中点,连接



则,且,,则就是异面直线与所成的角或其补角．

易知平面,所以平面,所以.

因为,,所以,

所以由勾股定理得,

又,,

所以在△中,由余弦定理得,

故异面直线与所成角的余弦值为．

故选:A．

9．（22-23高一下·河南洛阳）下列命题中，真命题有（    ）

①如果两条相交直线与另外两条相交直线分别平行，那么这两条相交直线和另外两条相交直线所成的锐角或直角相等；

②如果一个角的两边和另一个角的两边分别垂直，那么这两个角相等或互补；

③分别在两个不同的平面内且没有公共点的直线互相平行；

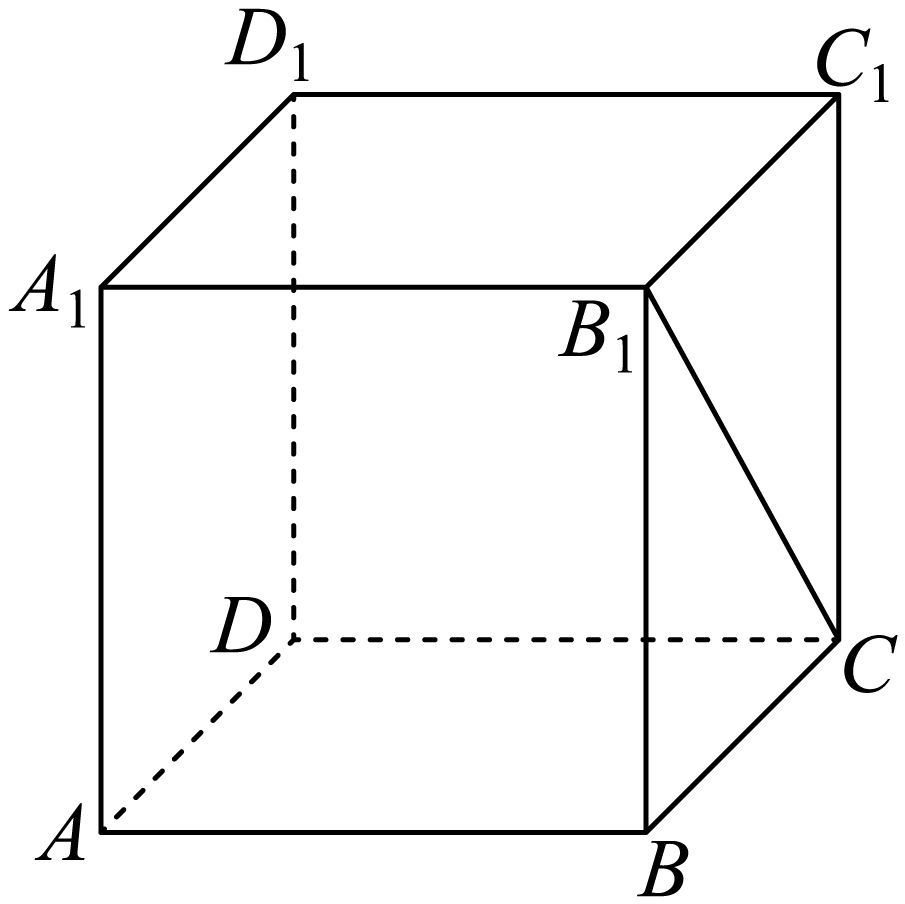
④，若，，则或.

A．1个 B．2个 C．3个 D．4个

【答案】B

【分析】由等角定理判断①④，举反例判断②，根据空间直线位置关系判断③.

【详解】由等角定理知，①正确，④正确；对于②，如图正方体中，



对于和，显然有，，

但是，，故②错误；

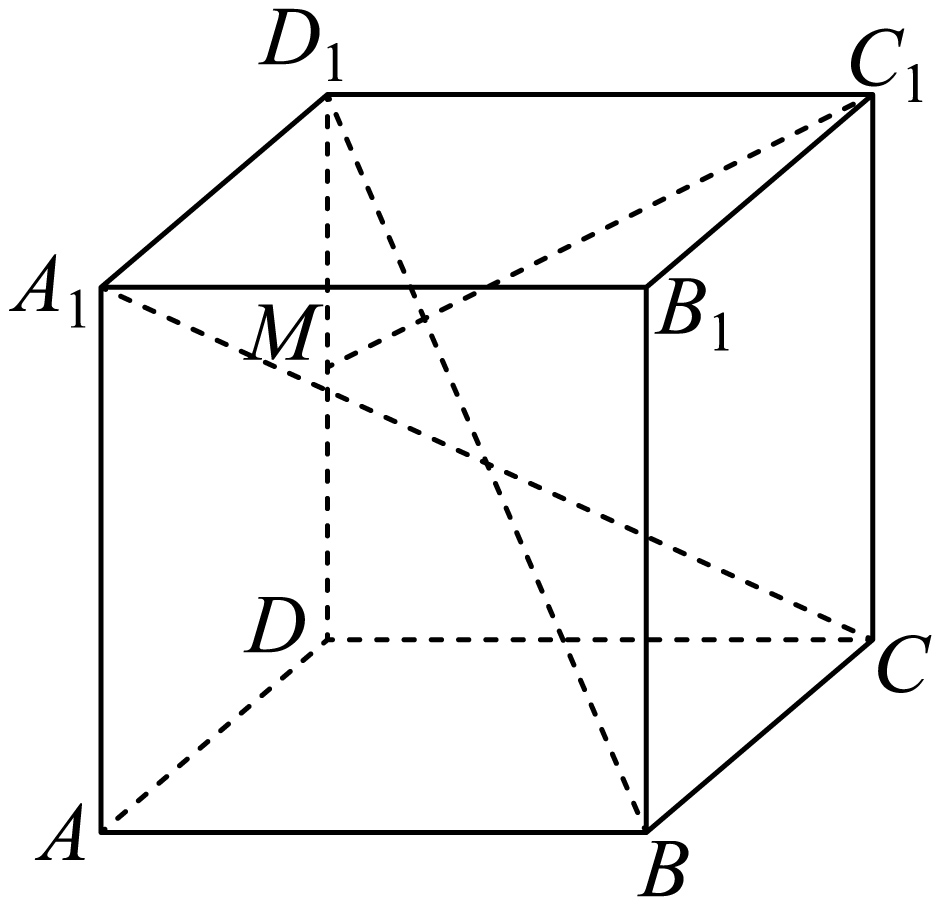
当两直线没有公共点且它们位于不同的平面内，则也可以平行，也可以异面，故③错误.

故正确的只有①④.

故选：B

**二、多选题**

10．（22-23高一下·河南·期中）已知正方体中，*M*为的中点，则下列直线中与直线是异面直线的有（    ）



A． B． C． D．

【答案】CD

【分析】根据空间直线的位置关系，结合异面直线的判定定理，一一判断各选项，即得答案.

【详解】由题意可知*M*为的中点，故，，

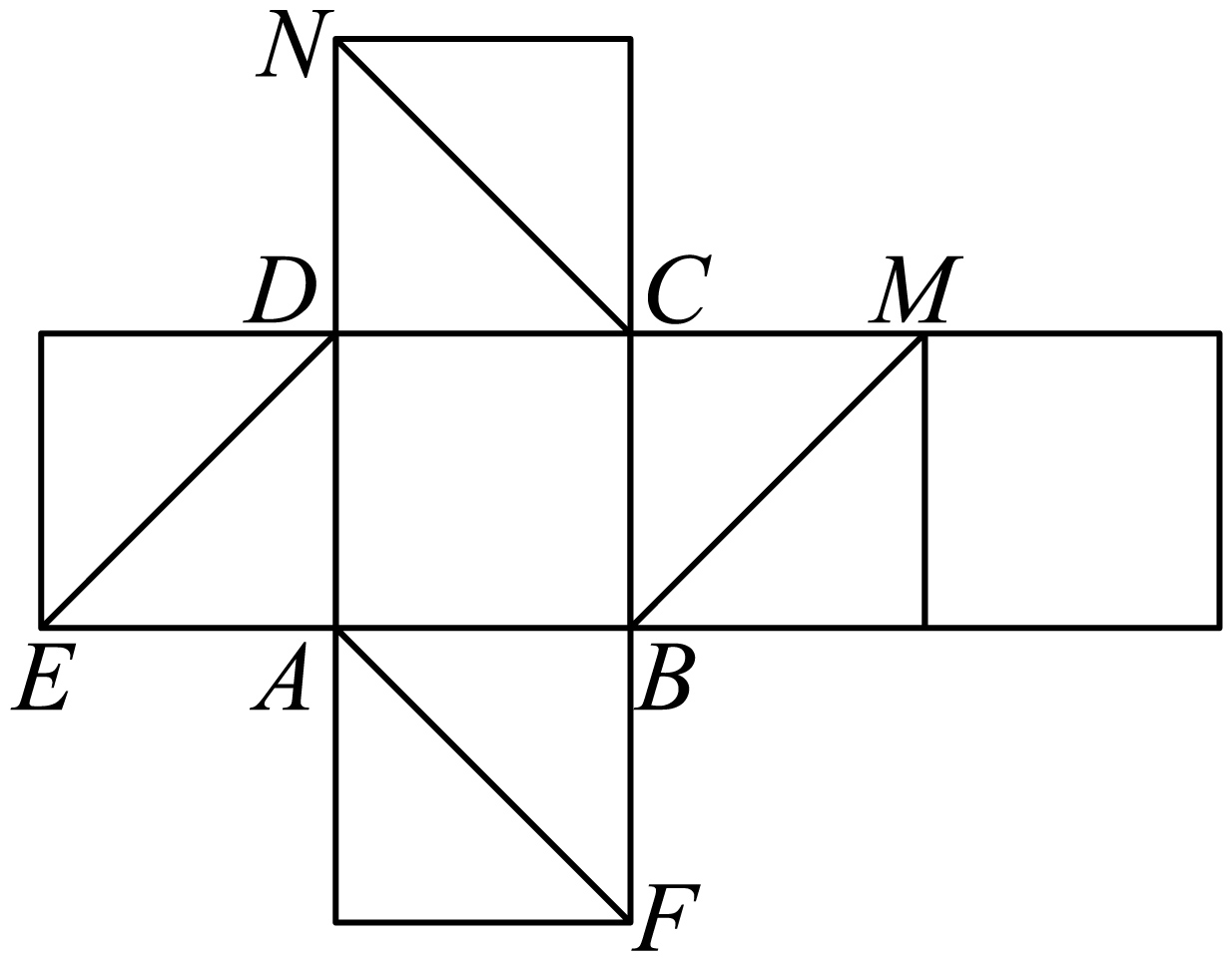
故，与均为相交直线，A，B错误；

平面，平面直线，

故与直线为异面直线，同理可说明与直线为异面直线，C*，*D正确，

故选：CD

11．（22-23高一下·陕西西安·期末）如图是一个正方体的平面展开图，在这个正方体中，下列说法中正确的序号是（    ）



A．直线与直线相交；

B．直线与直线平行；

C．直线*BM*与直线是异面直线；

D．直线与直线成角.

【答案】CD

【分析】将正方体的平面展开图，复原为正方体，根据异面直线的定义，可判定A、B不正确；C正确；再结合异面直线所成的角的定义与求解，可判定D正确.

【详解】如图所示，将正方体的平面展开图，复原为正方体，

对于A中，直线与不同在任何一个平面内，否则四点共面，（矛盾），

所以直线与为异面直线，所以A不正确；

对于B中，直线与不同在任何一个平面内，否则四点共面，（矛盾），

所以直线与为异面直线，所以B不正确；

对于C中，平面平面，平面，平面，

所以直线与不相交，连接，则，而与相交，

所以与不平行，否则，不合题意，

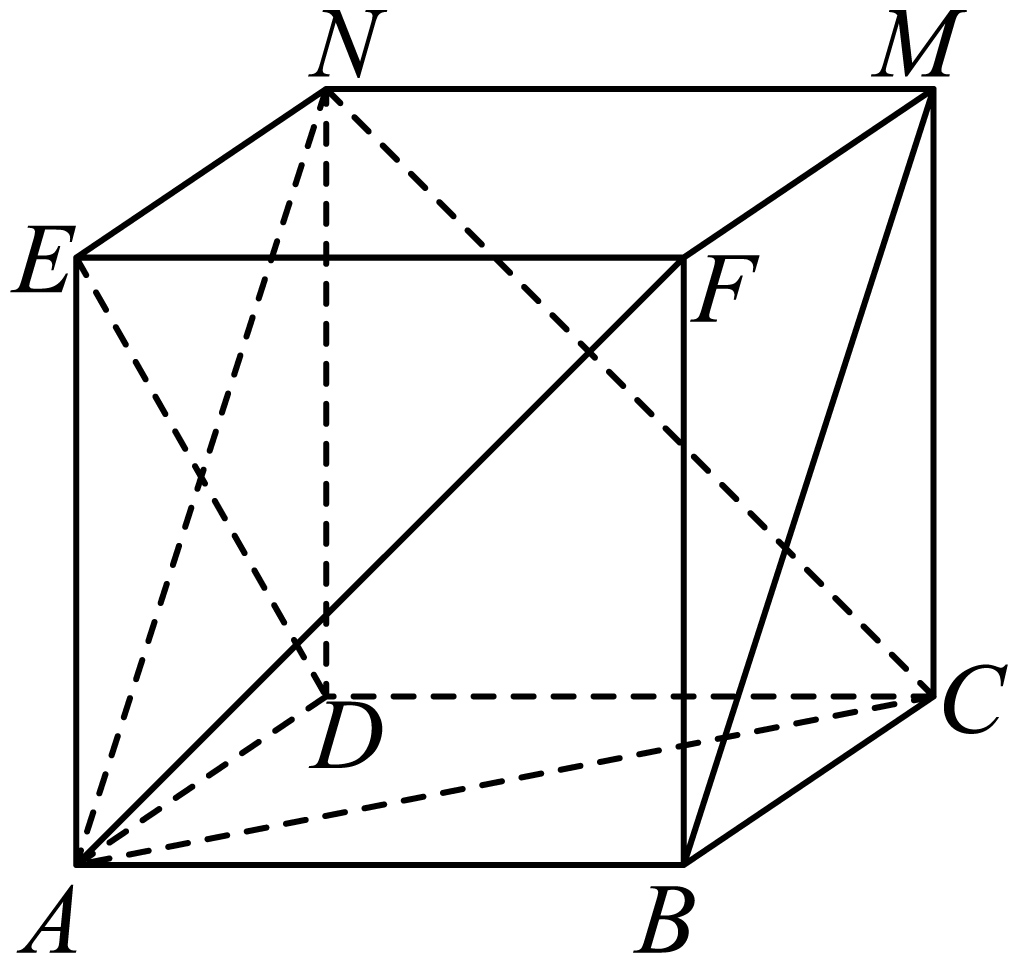
所以直线与是异面直线，所以C正确；

对于D中，连接，则为正三角形，可得，

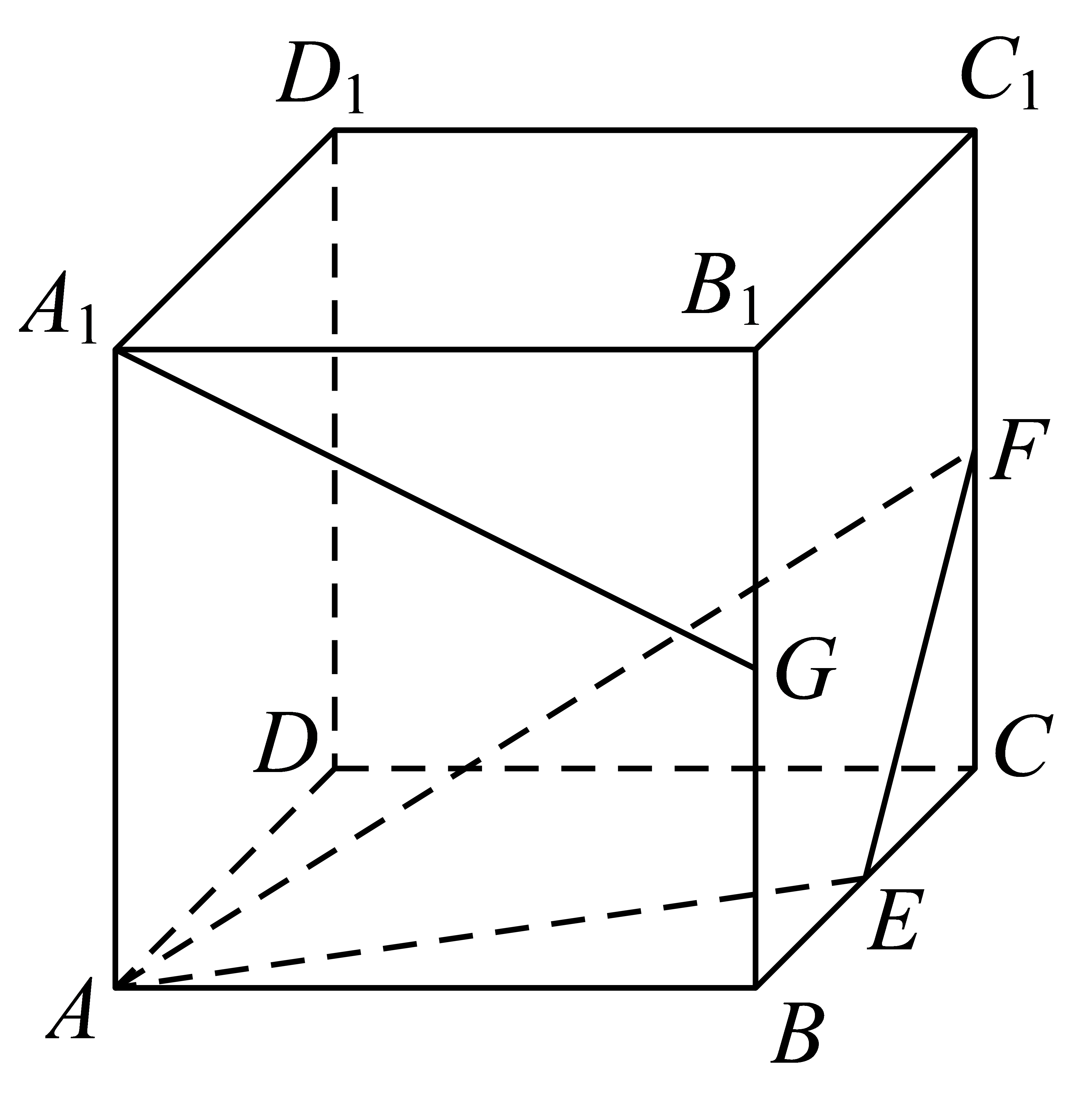
又由，则为直线与直线所成的角，

即直线与直线所成的角为，所以D正确.

故选：CD.



12．（22-23高三上·广东湛江·阶段练习）正方体的棱长为，分别为的中点.则下列说法正确的是（    ）



A．直线与平面平行

B．直线与直线垂直

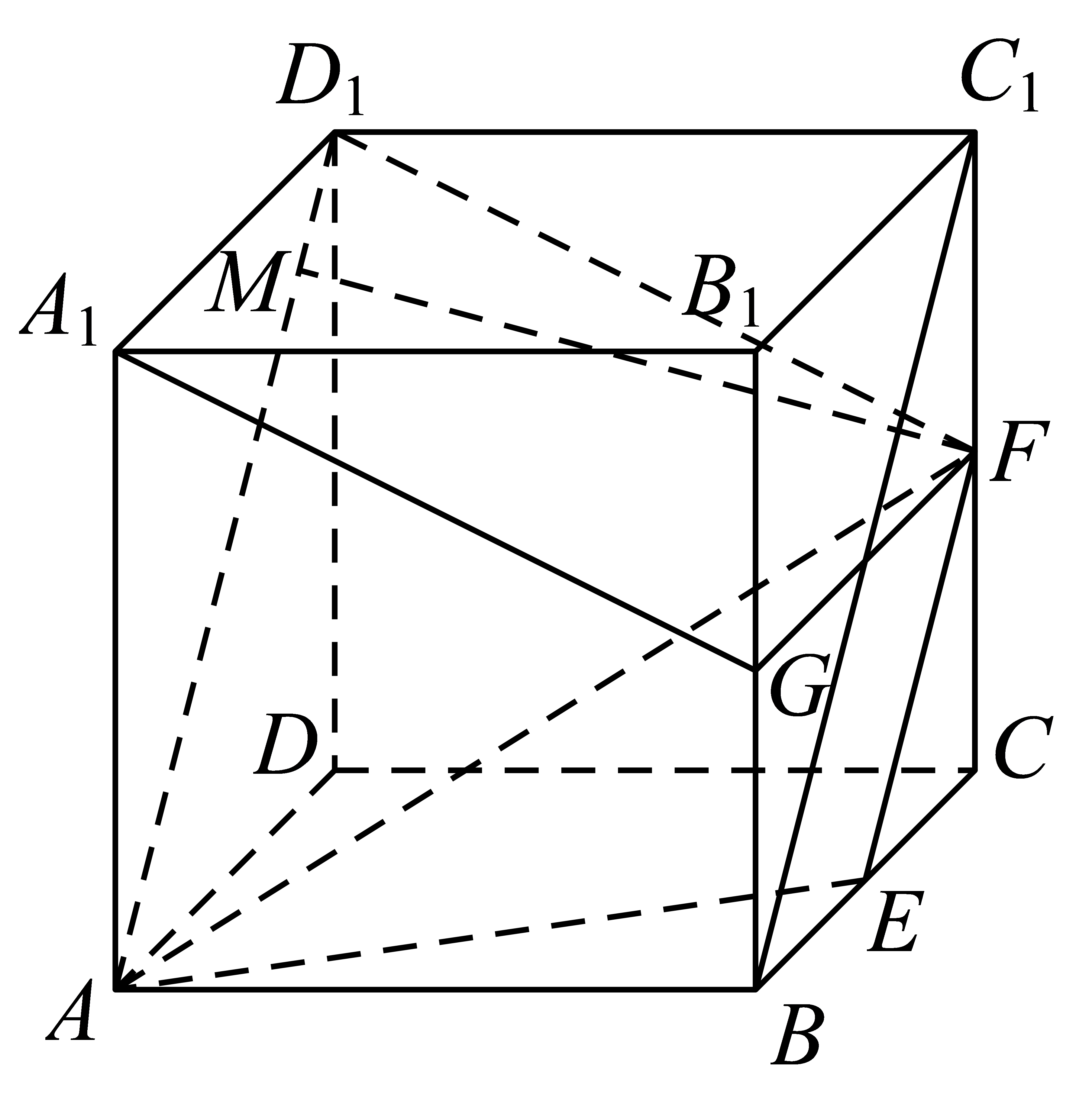
C．异面直线与所成角的余弦值为

D．平面截正方体所得的截面面积为

【答案】ACD

【分析】连接*AD1*，*FD1*，*GF*，*BC1*，证得*EF//AD1*，利用平面*AEFD1*逐一分析各选项即可判断作答.

【详解】正方体中，连接*AD1*，*FD1*，*GF*，*BC1*，如图：



因点*E*，*F*是*BC*，*CC1*中点，则*EF//BC1*，而正方体的对角面*ABC1D1*是矩形，则*AD1//BC1//EF*，

连*GF*，因*G*是棱*BB1*中点，则*GF//B1C1//A1D1*，且，即四边形*A1GFD1*是平行四边形，*A1G//D1F*，

平面*AEF*，平面*AEF*，于是*A1G//*平面*AEF*，A正确；

因平面*ABCD*，而平面*ABCD*，即有*AE*，若*AF*，必有平面*AEFD1*，*AD1*，与矛盾，B不正确；

因*EF//AD1*，*A1G//D1F*，则异面直线与所成角是或其补角，

作于*M*，显然，即四边形*AEFD1*是等腰梯形，，

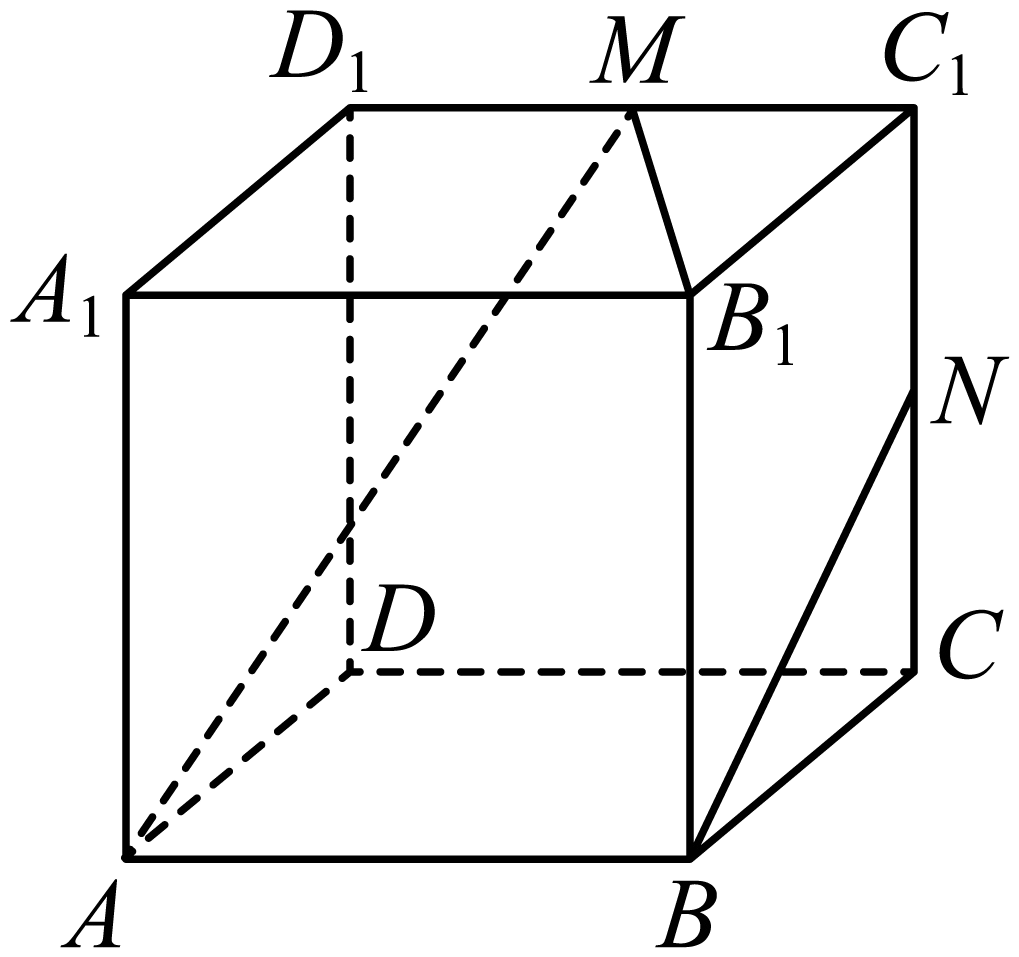
，，C正确；

，平面截正方体所得的截面是等腰梯形*AEFD1*，

等腰梯形*AEFD1*的面积为，D正确.

故选：ACD.

13．（19-20高一下·全国）如图所示，在正方体中，，分别为棱，的中点，则下列四个结论正确的是（    ）



A．直线与是相交直线 B．直线与是平行直线

C．直线与是异面直线 D．直线与是异面直线

【答案】CD

【分析】根据异面直线的定义逐项判断可得答案.

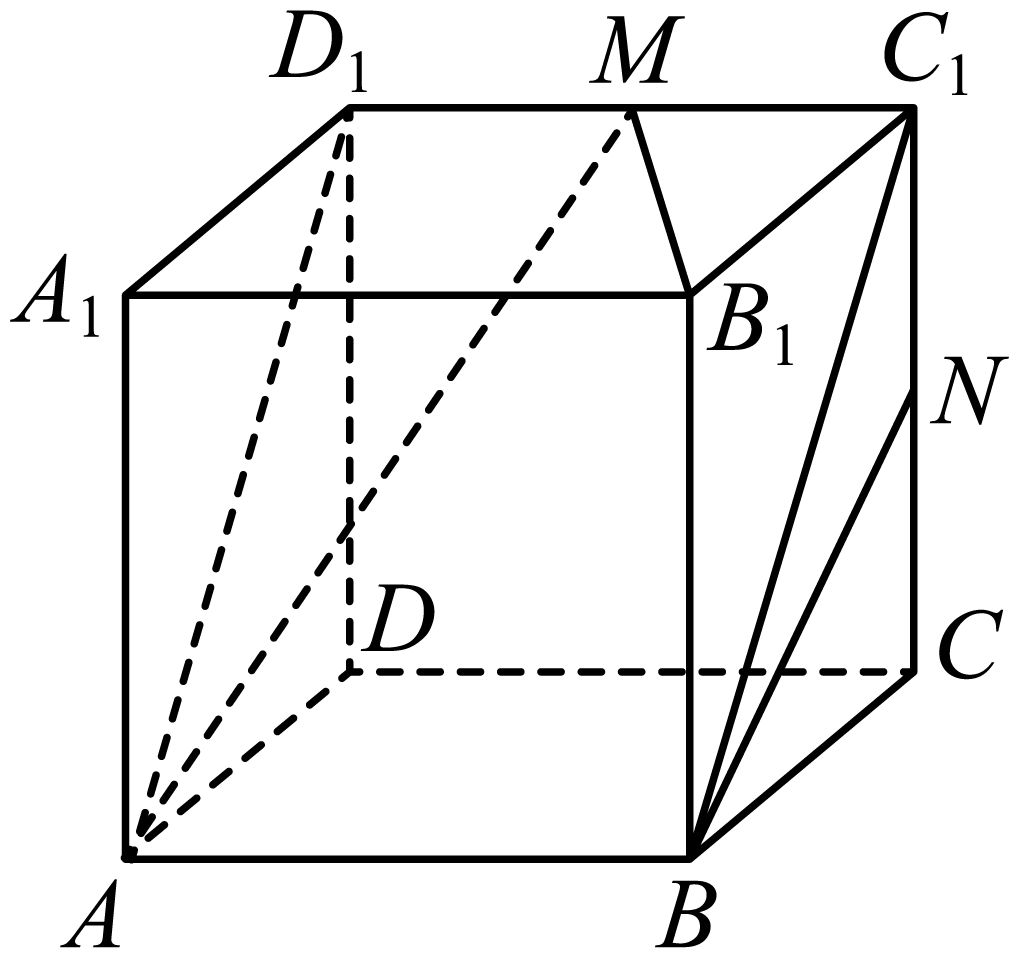
【详解】对于A，因为点在平面外，点在平面内，直线在平面内，不过点，所以与是异面直线，故A错误；

对于B，若直线与平行，则*MN*与*AB*共面，又平面，所以直线与不平行，故B错误；

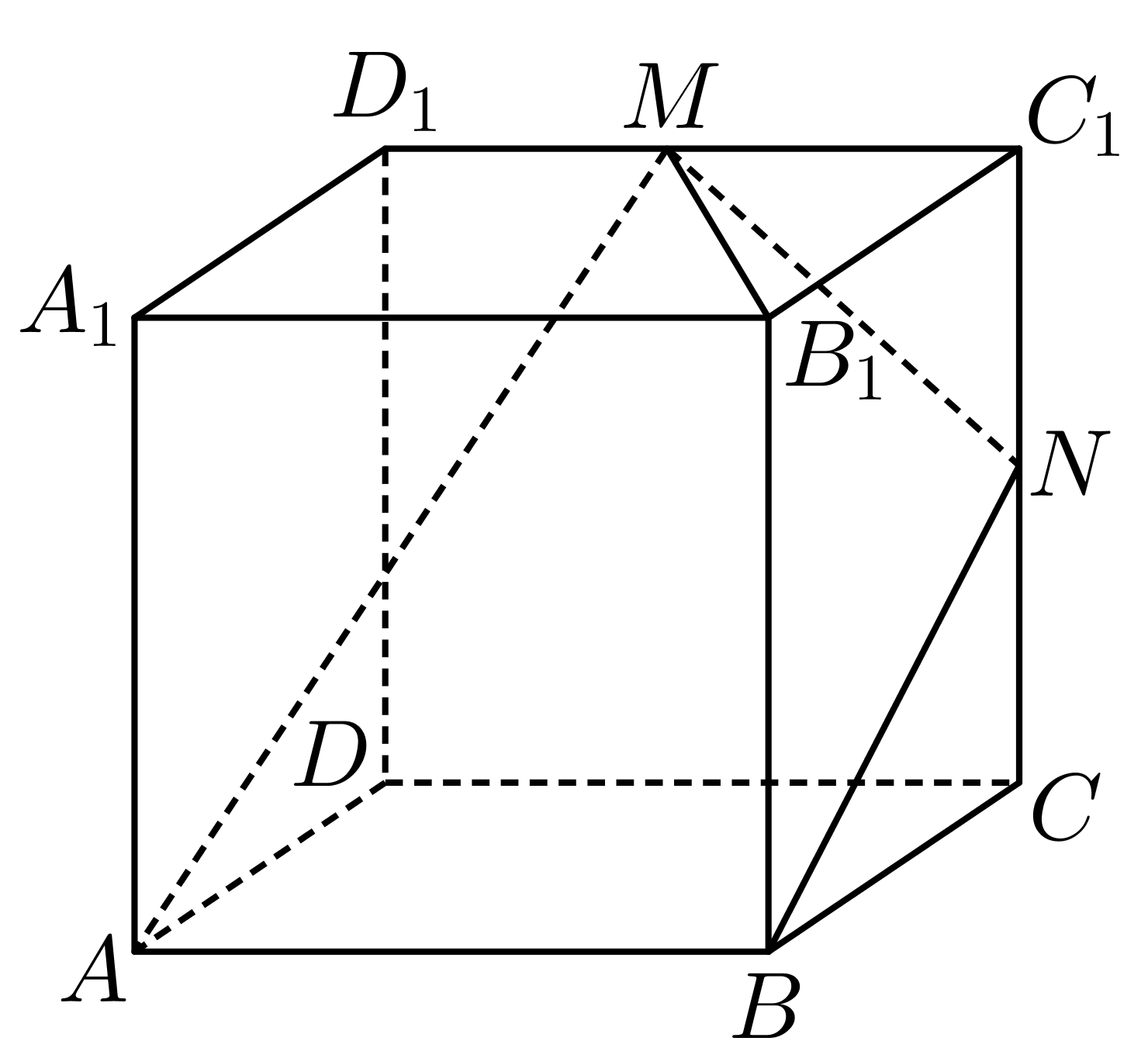
对于C，因为与都在平面内，在平面外，不过点，所以与是异面直线，故C正确；

对于D，因为与都在平面内，在平面外，不过点，所以与是异面直线，故D正确.

故选：CD.



14．（20-21高三上·山东菏泽·期中）如图所示，在棱长为2的正方体*ABCD*－*A1B1C1D1*中，*M*，*N*分别为棱*C1D1*，*C1C*的中点，则下列结论正确的是（    ）



A．直线*AM*与*BN*是平行直线

B．直线*BN*与*MB1*是异面直线

C．直线*MN*与*AC*所成的角为60°

D．平面*BMN*截正方体所得的截面面积为

【答案】BCD

【分析】利用反证法说明A错误；由异面直线的定义判断B；由异面直线所成角的定义可判断C；连接，知，则平面截正方体所得的截面为等腰梯形，求出面积判断D．

【详解】对于A，假设直线与是平行直线，则四边形为平面图形，

平面平面，且平面平面，平面平面，

，则，与矛盾，故A错误；

对于B，平面，平面，平面，

由异面直线的定义可得，直线与是异面直线，故B正确；

对于C，连接，，可得，为直线与所成的角，

而，可得直线与所成的角为，故C正确；

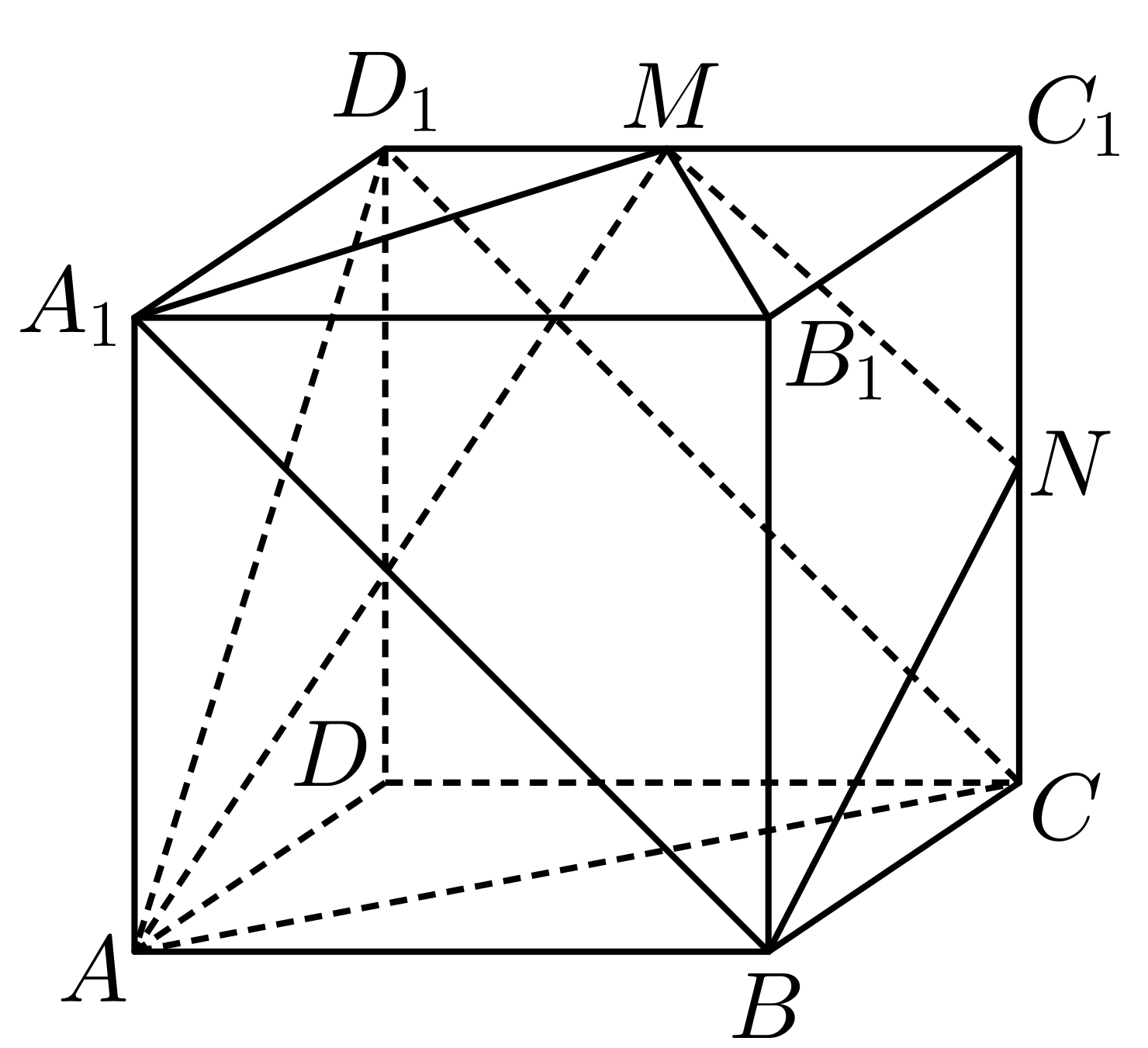
对于D，连接，可知，则平面截正方体所得的截面为等腰梯形，

棱长为2，，，，

等腰梯形的高为，

，故D正确．

故选：BCD．



**三、填空题**

15．（23-24高一下·江苏南通·期中）已知空间四边形的对角线，，，分别为，的中点，若，则异面直线，所成角为 ．

【答案】

【分析】取的中点，利用异面直线所成角的定义求解即得.

【详解】在四面体中，取的中点，连接，

由*M*、*N*分别为，的中点，得，

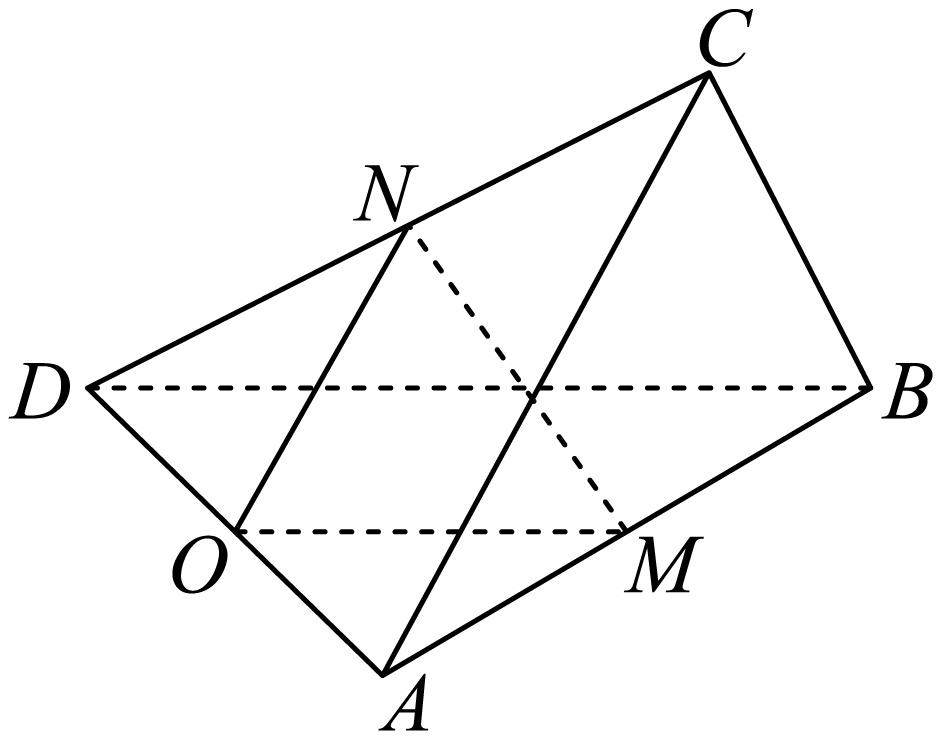
则是异面直线*AC*与*BD*所成的角或其补角，

显然，而，有，

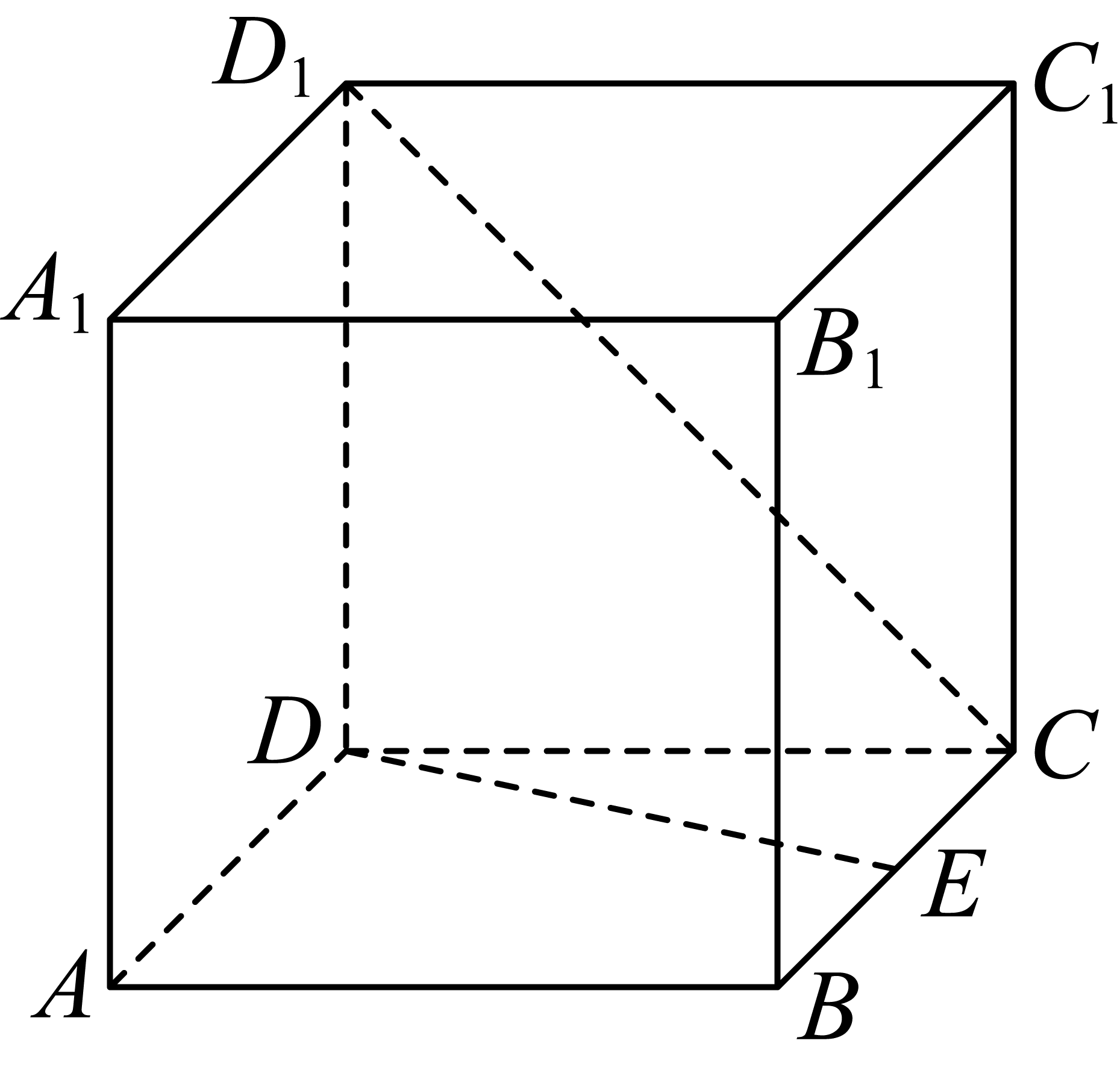
于是，

所以异面直线*AC*与*BD*所成的角是.

故答案为：



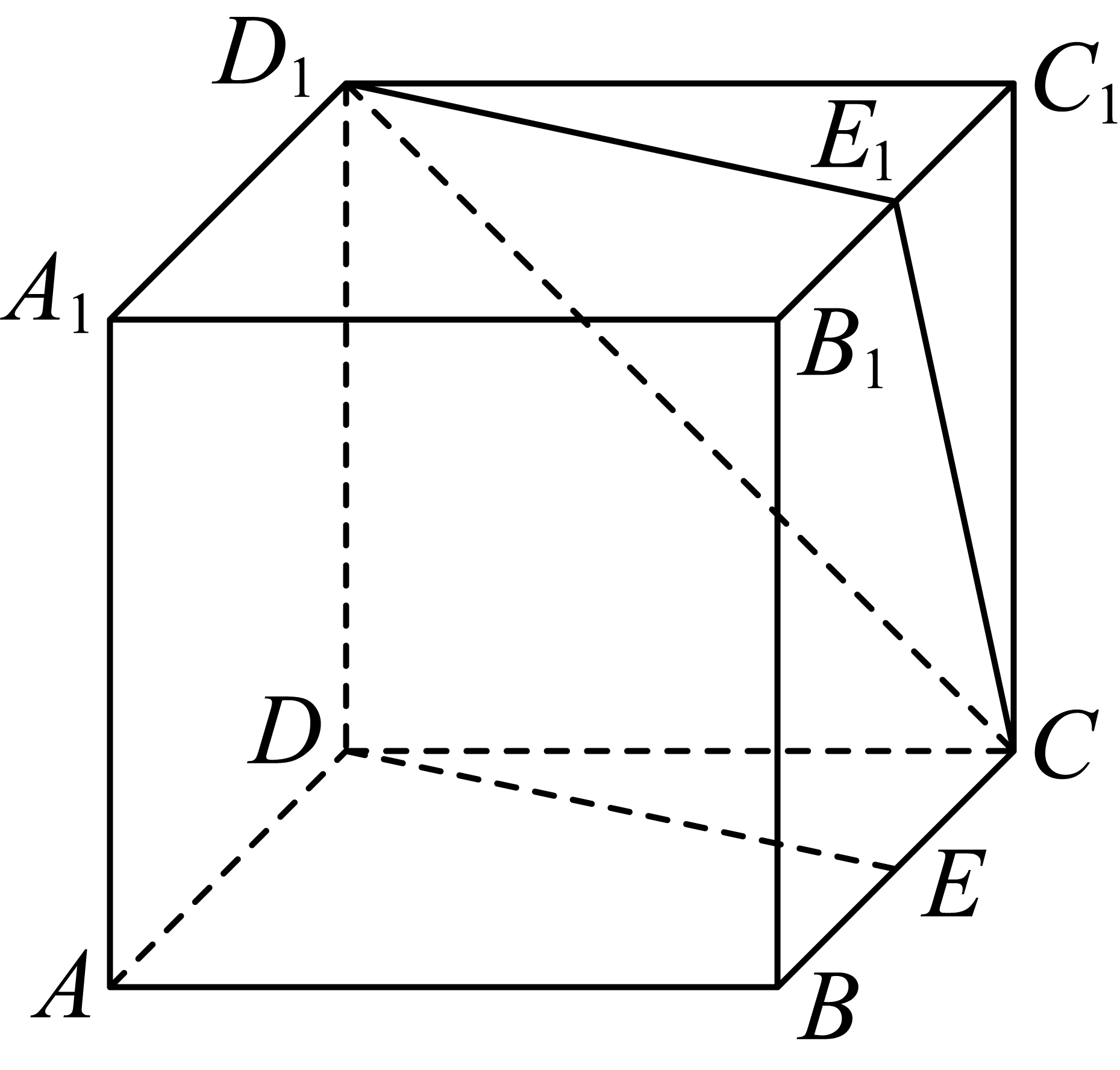
16．（23-24高一下·江苏连云港·期中）如图，在正方体中，是的中点，求与两条异面直线所成角的正弦值为



【答案】

【分析】构造平行线，将异面直线转化为相交直线，在利用余弦定理求解夹角余弦值，最后求解正弦值即可.

【详解】



如图，作//，易知是的中点，连接，故即为所求角，

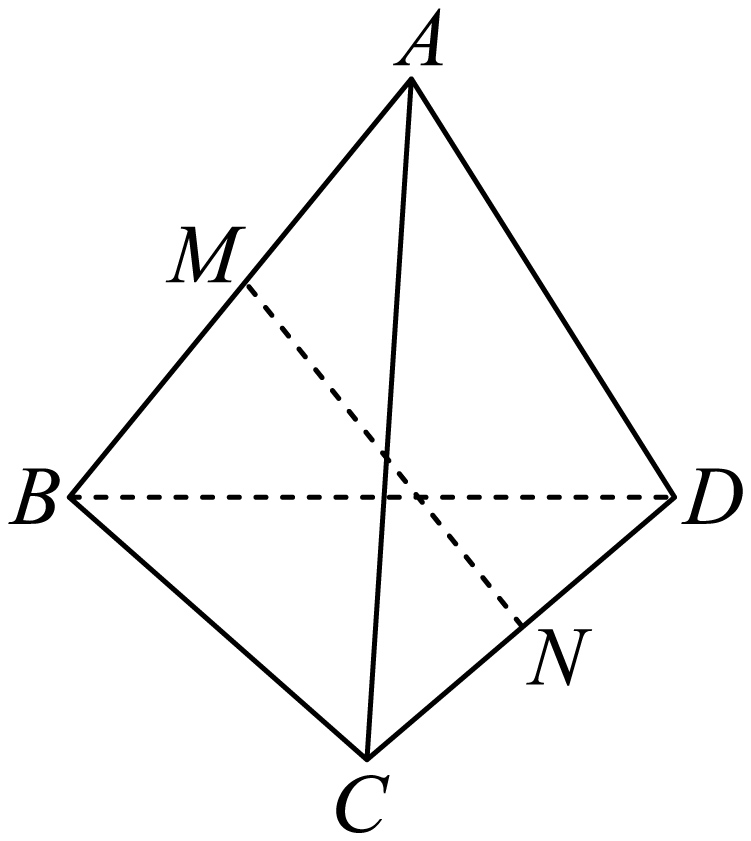
设正方体的棱长为，由勾股定理得，，

在中，由余弦定理得，

易知，故.

故答案为：

17．（23-24高一下·浙江杭州·期中）如图，在四面体中，与所成的角为，分别为的中点，则线段的长为 .

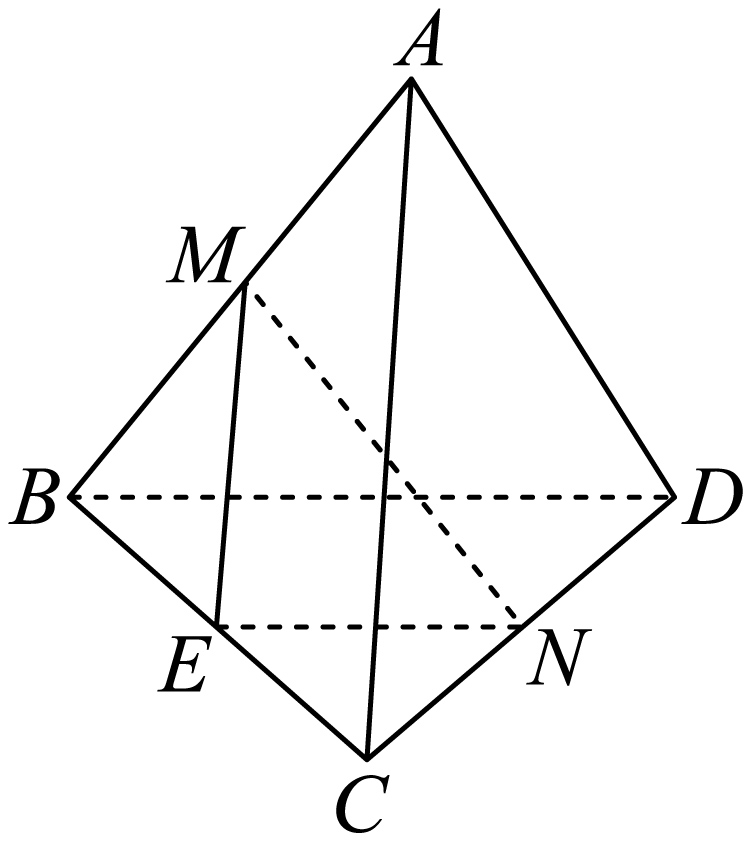


【答案】或

【分析】取的中点，连接、，即可得到为异面直线与所成的角或其补角，即或，再利用余弦定理计算可得.

【详解】取的中点，连接、，

、分别为、的中点，且，



同理可得且，

为异面直线与所成的角或其补角，则或.

在中，，，

若，由余弦定理可得

；

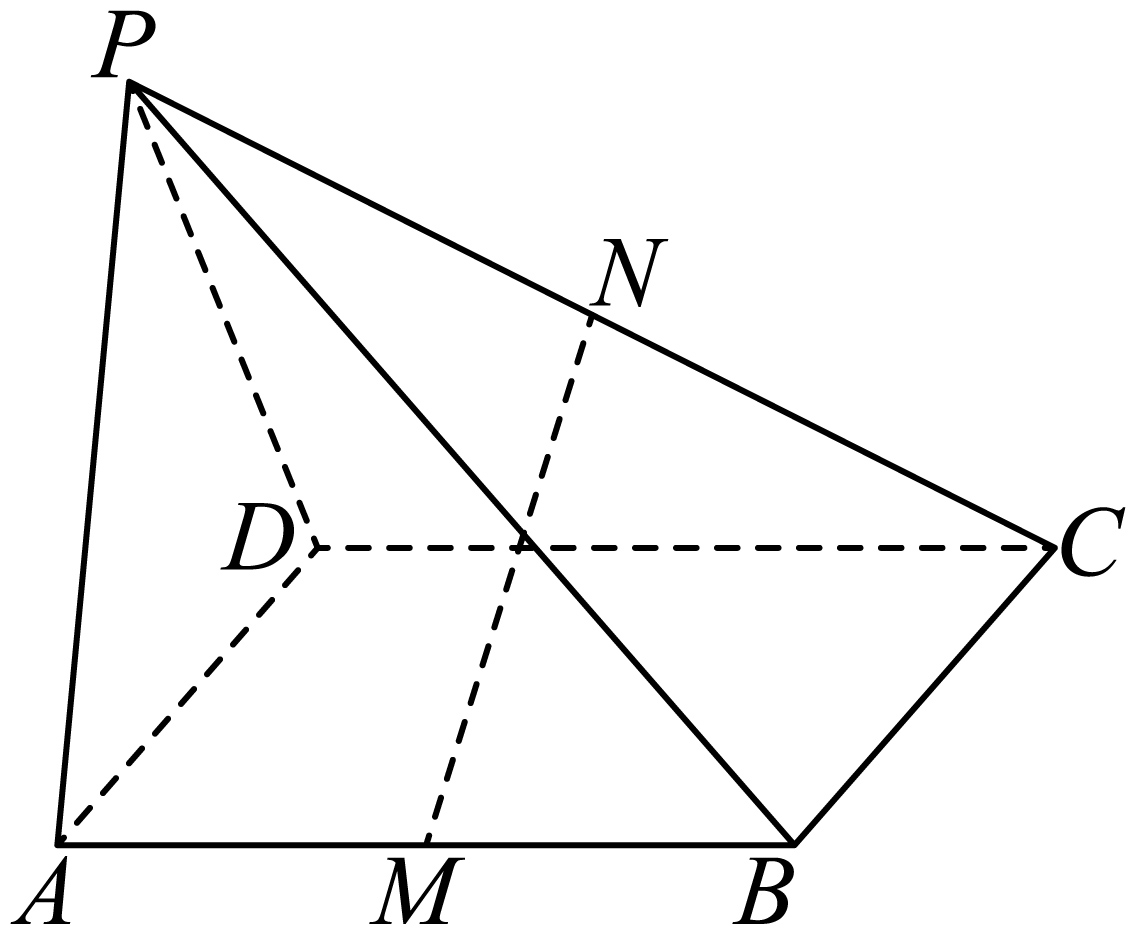
若，由余弦定理可得

；

综上所述，或.

故答案为：或.

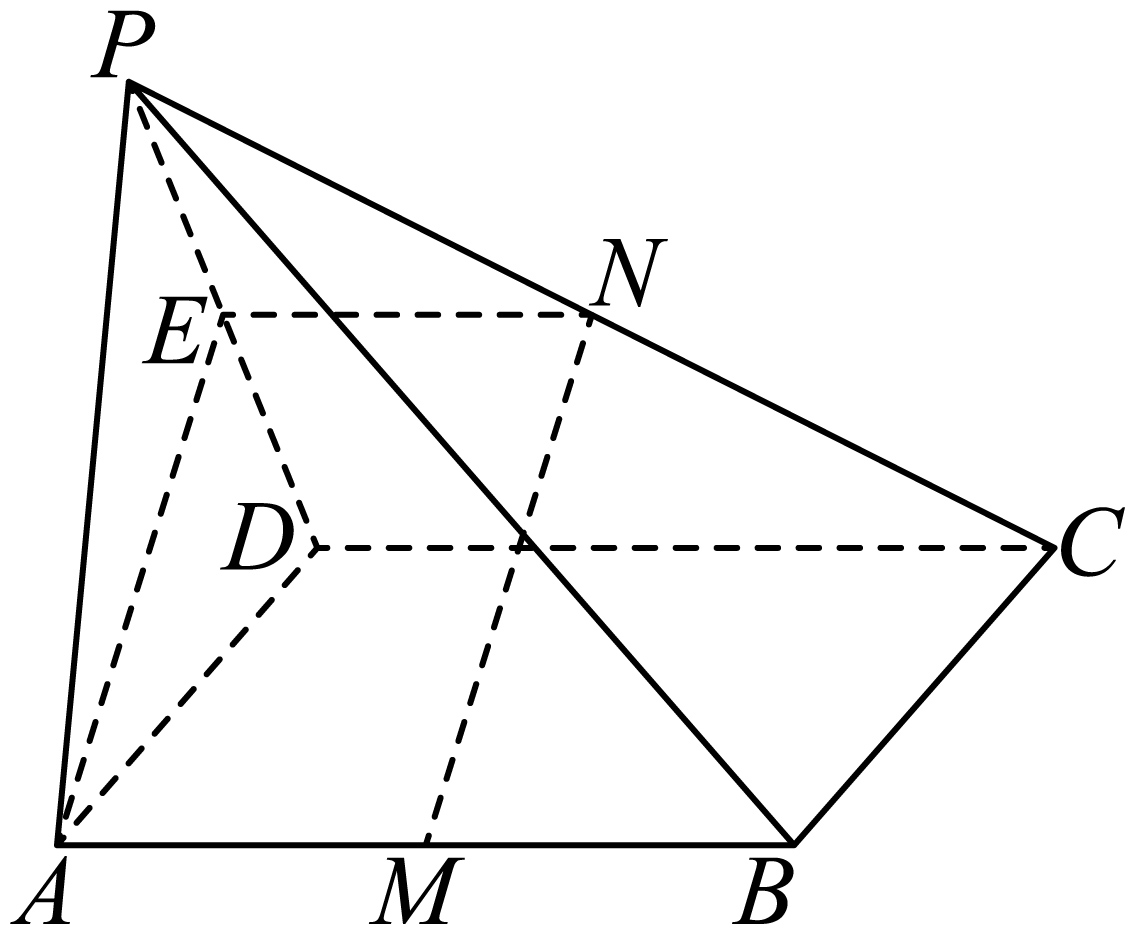
18．（21-22高二·全国）如图，在四棱锥中，底面是平行四边形，*M*，*N*分别是，的中点，若，，则异面直线与所成角大小是 ．



【答案】

【分析】取的中点，证明，得到是异面直线与所成的角或其补角，结合题设条件在中，求即得.

【详解】



如图，取的中点，连接,

因*M*，*N*分别是，的中点，底面是平行四边形，故且

又且，故得,

即,故是异面直线与所成的角或其补角.

由,两边取平方，，

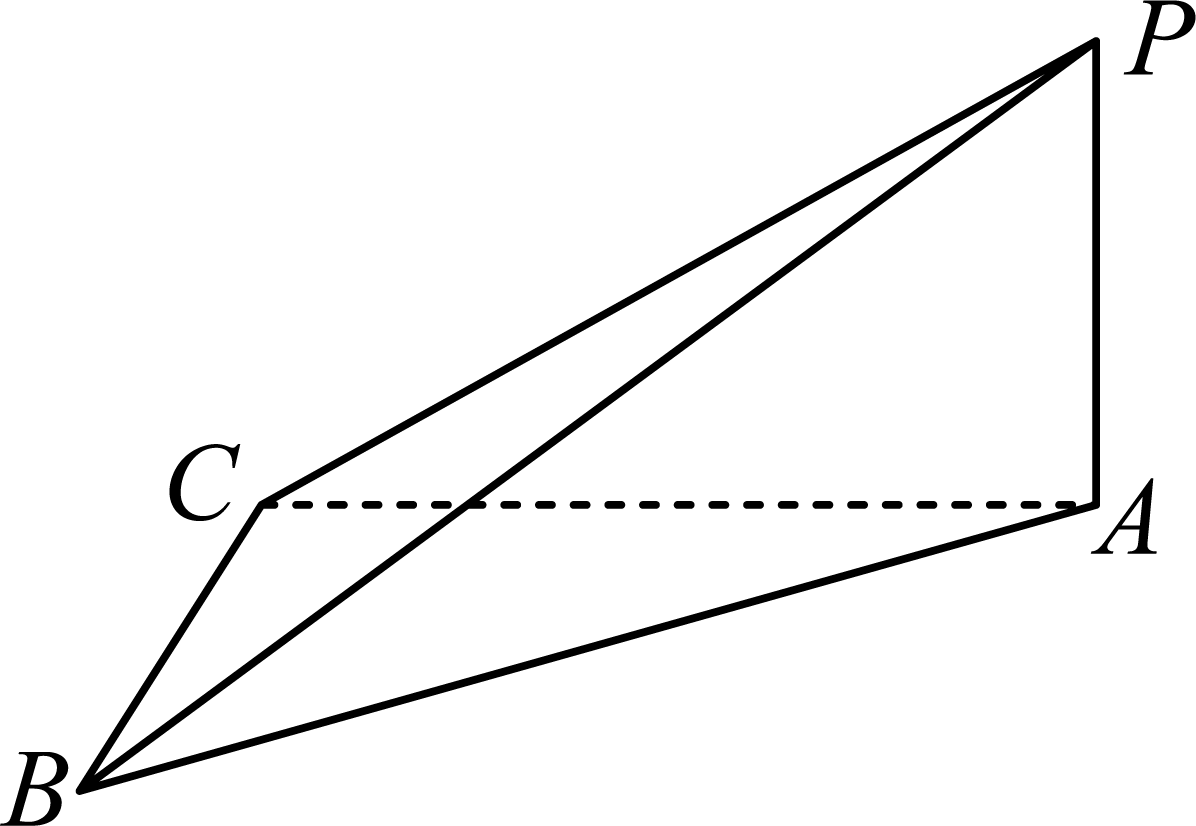
设的夹角为，因，,代入上式，

整理可得，，即，故,则，

在中，设,，因，故.

故答案为：

19．（22-23高一下·山西·期末）如图，在四面体中，点在平面上的射影是，，若，，则异面直线*PC*与*AB*所成角的余弦值为 ．



【答案】

【分析】根据异面直线所成角的定义结合余弦定理，即可求解.

【详解】如图所示，分别取的中点，连接，

因为点在平面上的射影是，所以平面*ABC*，则，，

因为分别为的中点，所以，，

所以与所成的角即或其补角，

因为，所以，，

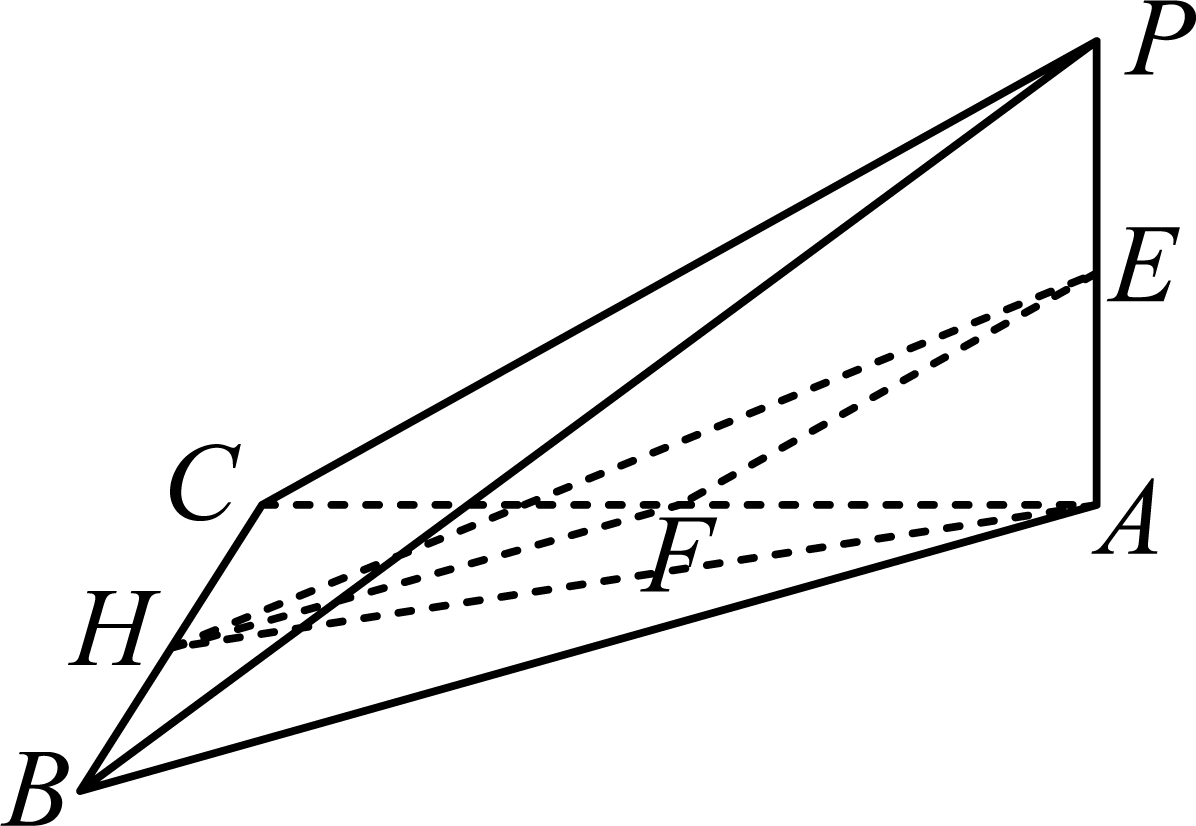
所以，

又因为，所以，

所以，

故异面直线*PC*与*AB*所成角的余弦值为．

故答案为：.



**四、解答题**

20．（23-24高二上·四川自贡）如图，在正方体中，点*E*，*F*分别为棱，*AB*的中点．



(1)求证：*E*、*F*、*C*、四点共面：

(2)求异面直线与*BC*所成角的余弦值．

【答案】(1)证明见解析

(2)

【分析】（1）证明，即可得四点共面；

（2）由平行关系将异面直线所成角转化为相交直线所成角，在平面内解三角形即可.

【详解】（1）连接.

在中，点*E*，*F*分别为棱，*AB*的中点，

则，

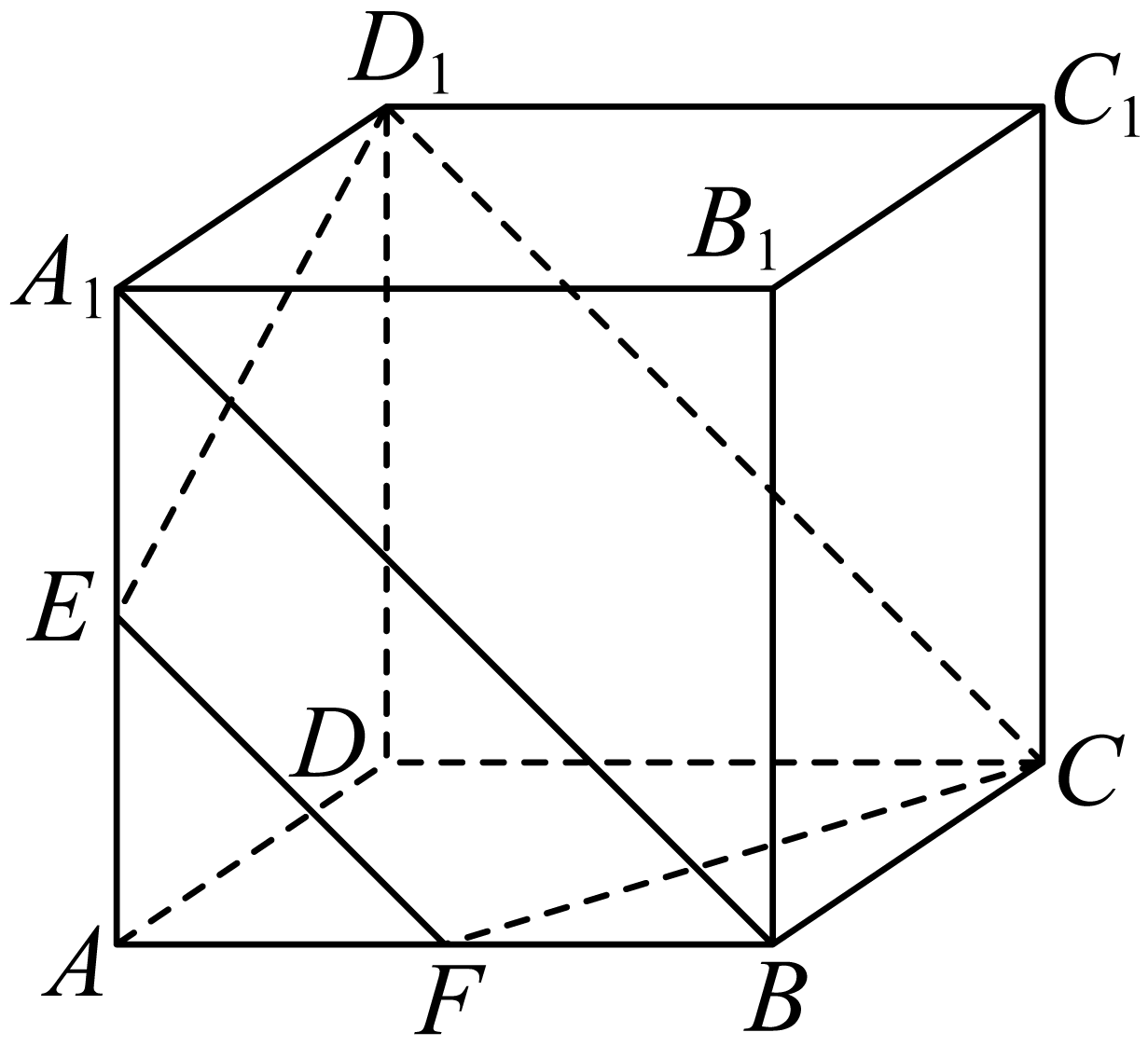
在正方体中，，

，且，

四边形是平行四边形，

，则，

故、、、四点共面.



（2）由（1）知，，

则即为所求异面直线与*BC*所成的角，

设正方体的棱长为，

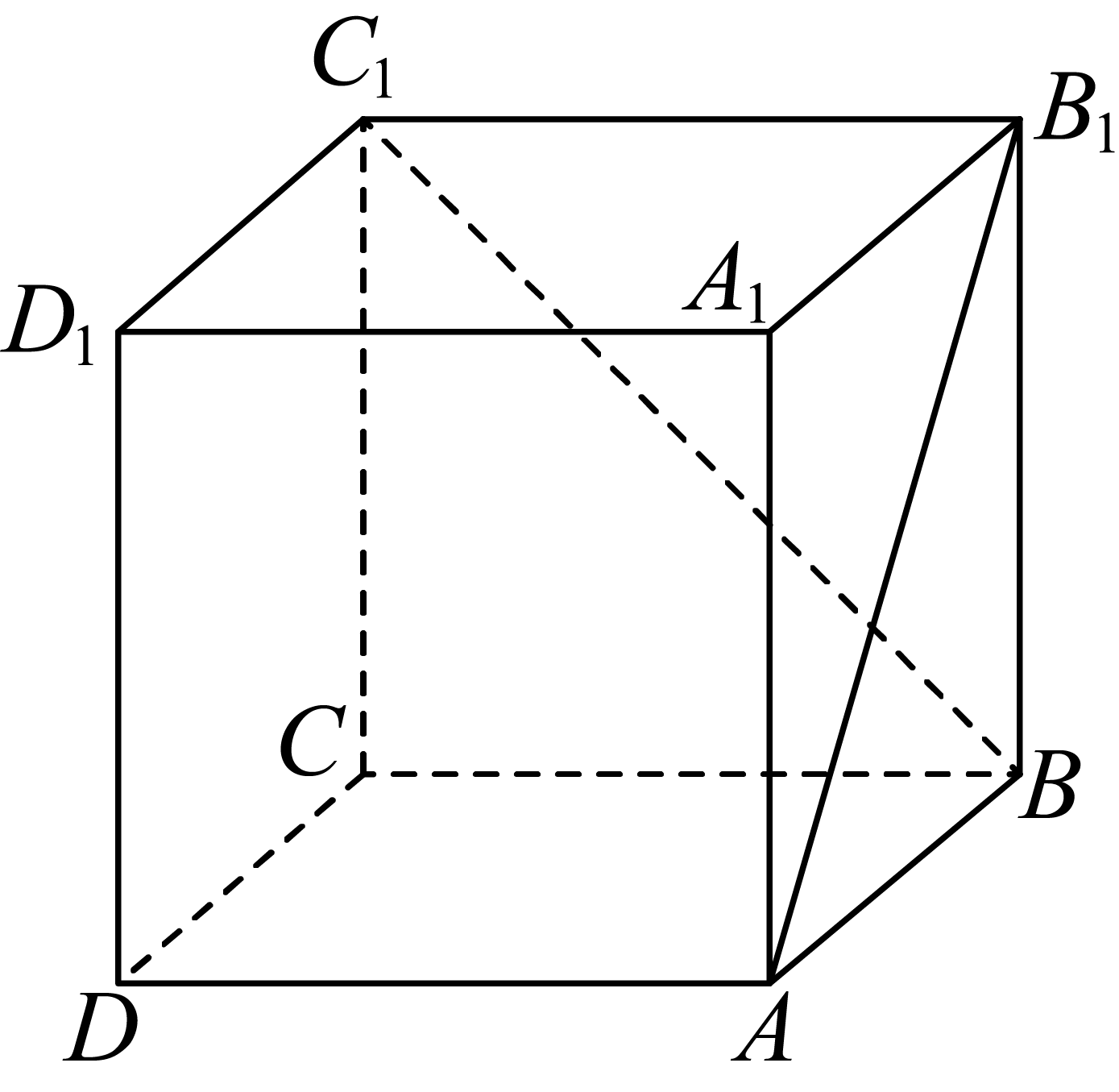
在中，，

则，

所以.

故所求异面直线与*BC*所成角的余弦值为．

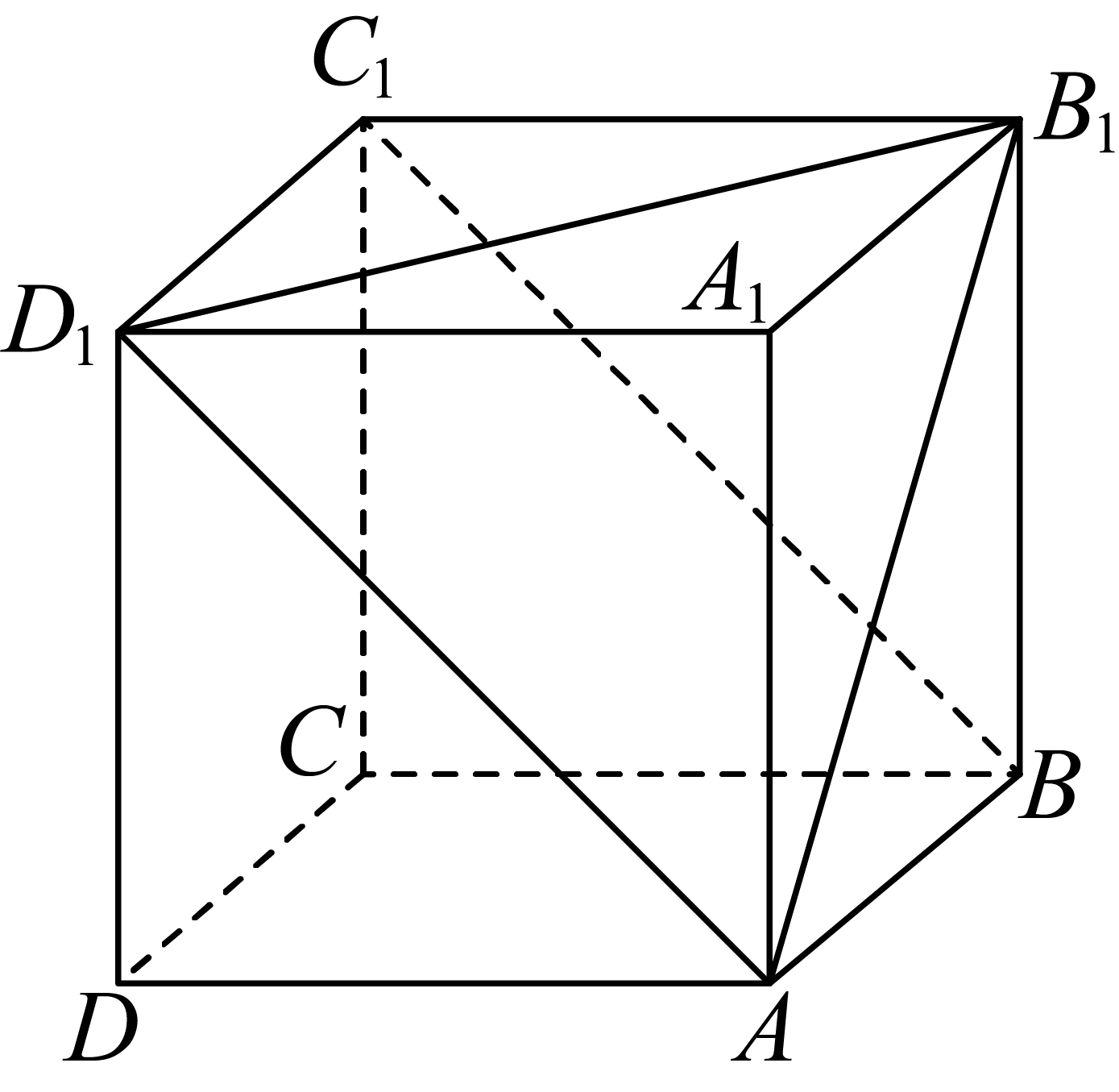
21．（23-24高二上·新疆阿克苏·阶段练习）如图，在正方体中，求异面直线与所成的角的大小；



【答案】

【分析】证明，由异面直线夹角的定义可知是异面直线与所成角的平面角，又为正三角形，所以可得结果为.

【详解】连接， ，如下图所示：



因为，

所以四边形是平行四边形，则，

所以异面直线与所成的角即为直线与所成的角，

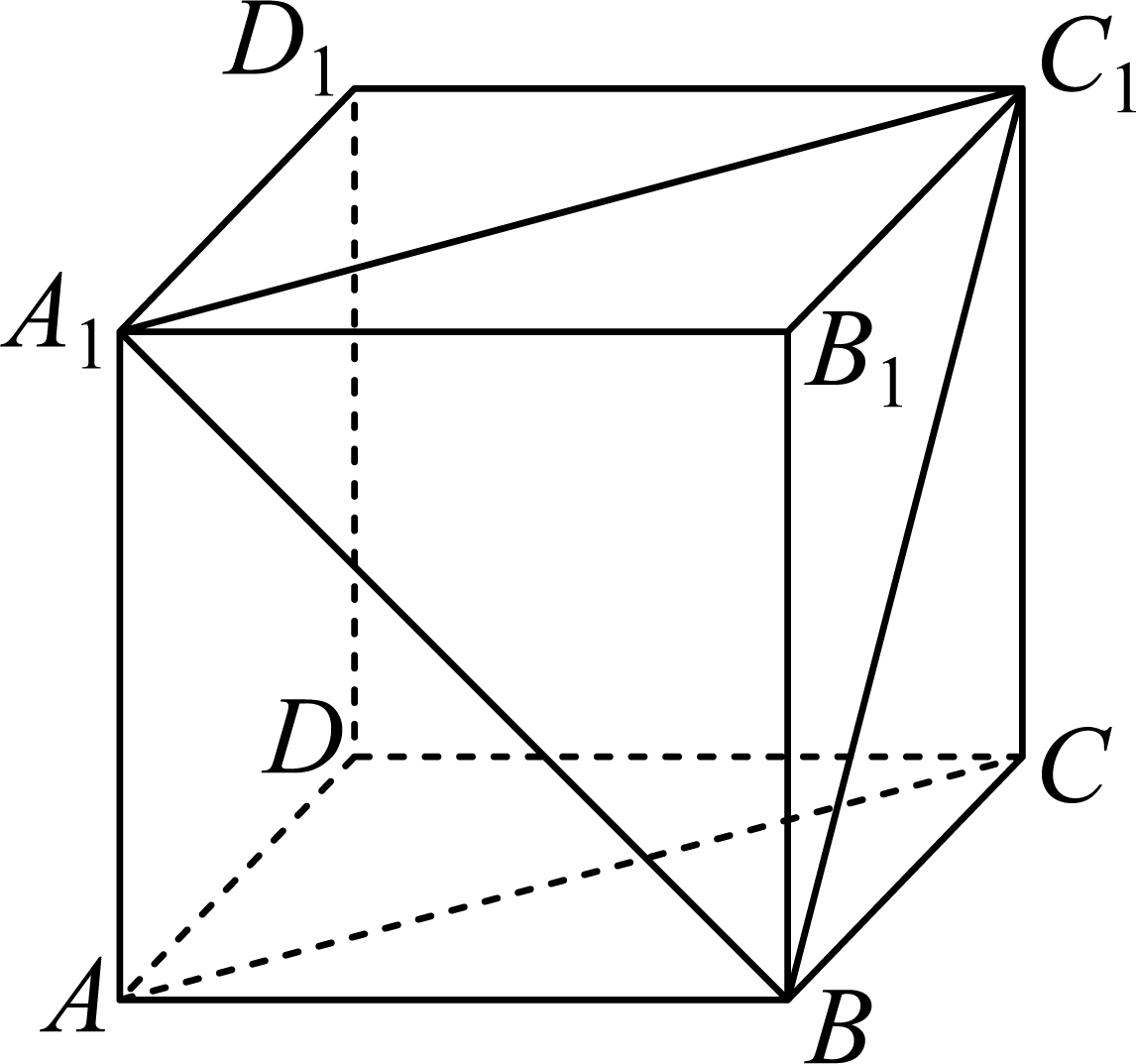
即是异面直线与所成角的平面角，

设正方体的棱长为，则，

所以为正三角形，因此.

即异面直线与所成的角的大小为.

22．（22-23高一·全国·课堂例题）如图，已知是棱长为*a*的正方体．



(1)求异面直线与*BC*所成的角；

(2)求异面直线与*AC*所成的角．

【答案】(1)90°；

(2)60°．

【分析】（1）（2）根据正方体的结构特征，利用异面直线的定义求出夹角即可.

【详解】（1）在中，因为，则即为直线与*BC*所成的角或其补角，

因为，所以直线与*BC*所成的角为90°．

（2）在中，连接，，，

则四边形为平行四边形，所以，

因此直线与*AC*所成的角就是直线与所成的角或其补角，

因为，，，即，

所以直线与所成的角为60°，即直线与*AC*所成的角为60°．

23．（22-23高一·全国·单元测试）如图所示，在四面体中，*E*、*F*分别是线段*AD*、*BC*上的点，．



(1)求证：直线与是异面直线；

(2)若，，求、所成角的大小．

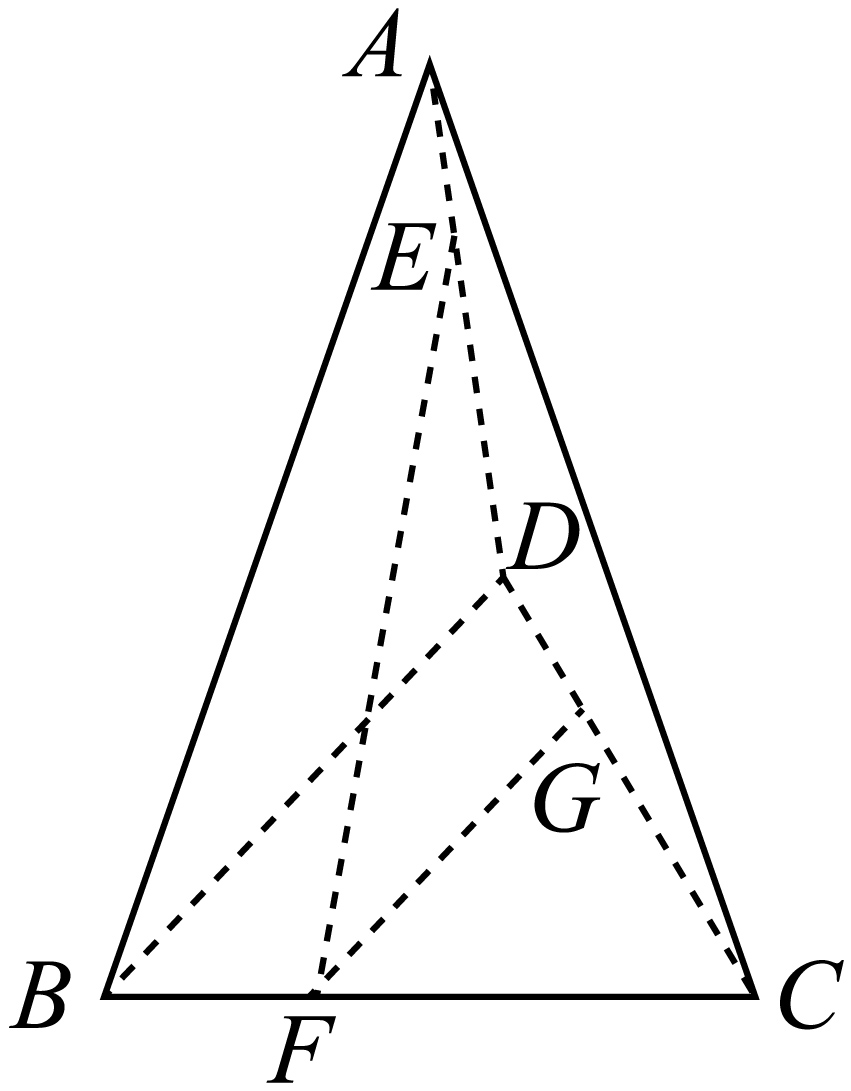
【答案】(1)证明见解析

(2)60°

【分析】（1）为上靠近的三等分点，易证四点共面（面），结合异面直线的定义判断与是否异面；

（2）分别为靠近的三等分点，易知、所成角为或其补角，进而求其大小.

【详解】（1）若为上靠近的三等分点，则，故，

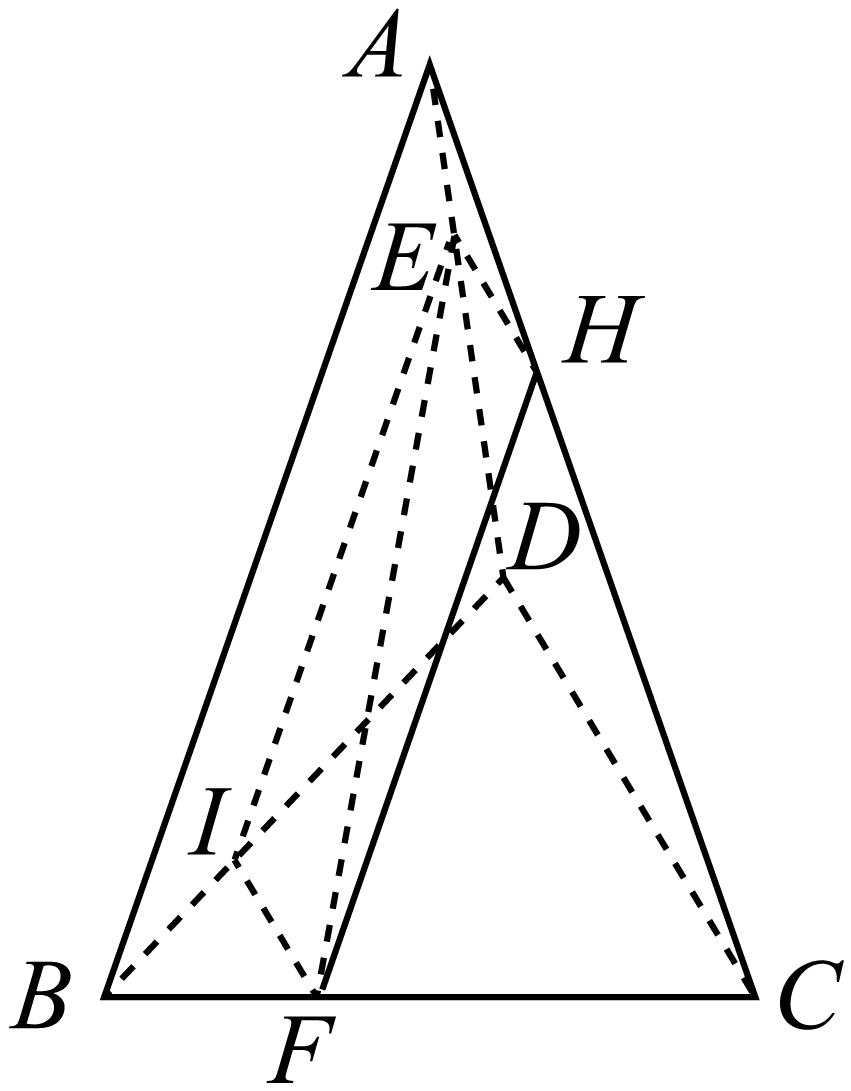


所以四点共面，显然不共线，故面与面为同一个平面，

而面，面，即面，面，，

所以直线与是异面直线；

（2）若分别为靠近的三等分点，则，

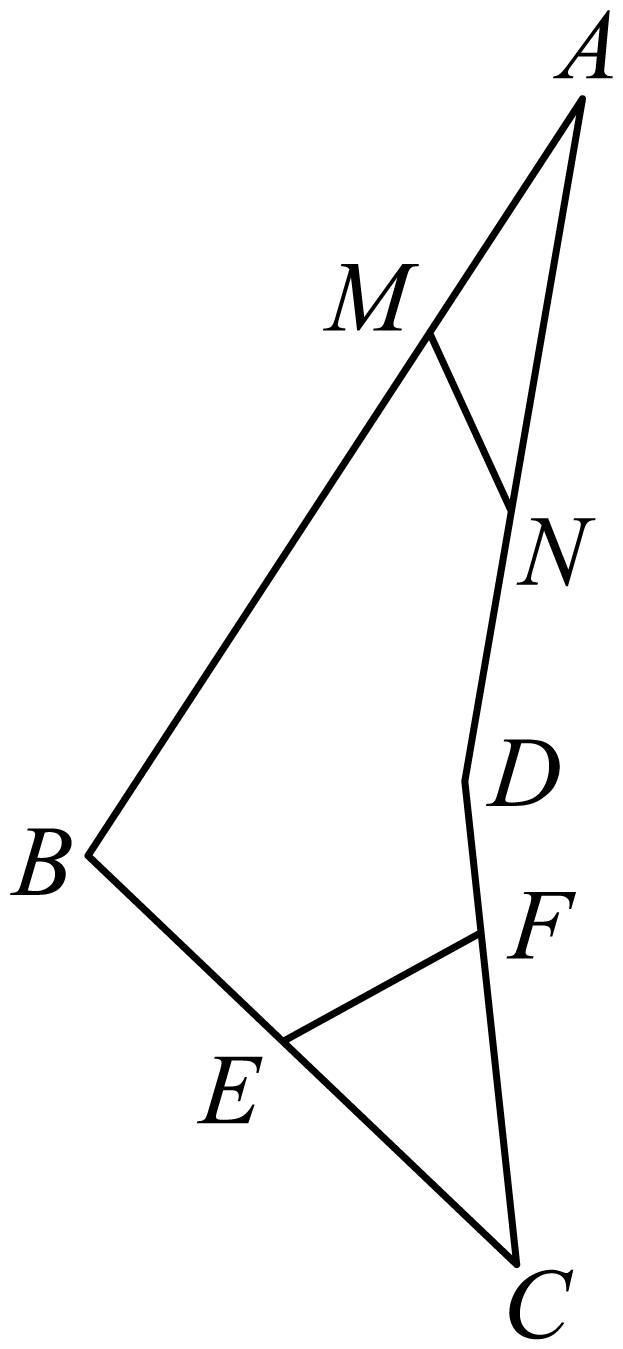


所以，，故为平行四边形，且、所成角为或其补角，

又，，则，

由，故，则、所成角为60°.

24．（22-23高二上·上海黄浦）已知是空间四边形，如图所示（，，，分别是、、、上的点）．



(1)若直线与直线相交于点，证明，，三点共线；

(2)若，为，的中点，，，，求异面直线与所成的角．

【答案】(1)证明见解析

(2)

【分析】（1）根据点与线和点与面的位置关系推出是平面和的公共点，结合平面平面，即可证明；

（2）连接，作的中点，并连接，，利用中位线的性质可以得到异面直线与所成的角等于直线与所成角，再根据余弦定理即可求解.

【详解】（1）因为，，平面，平面，

所以平面，

因为，，平面，平面，

所以平面，

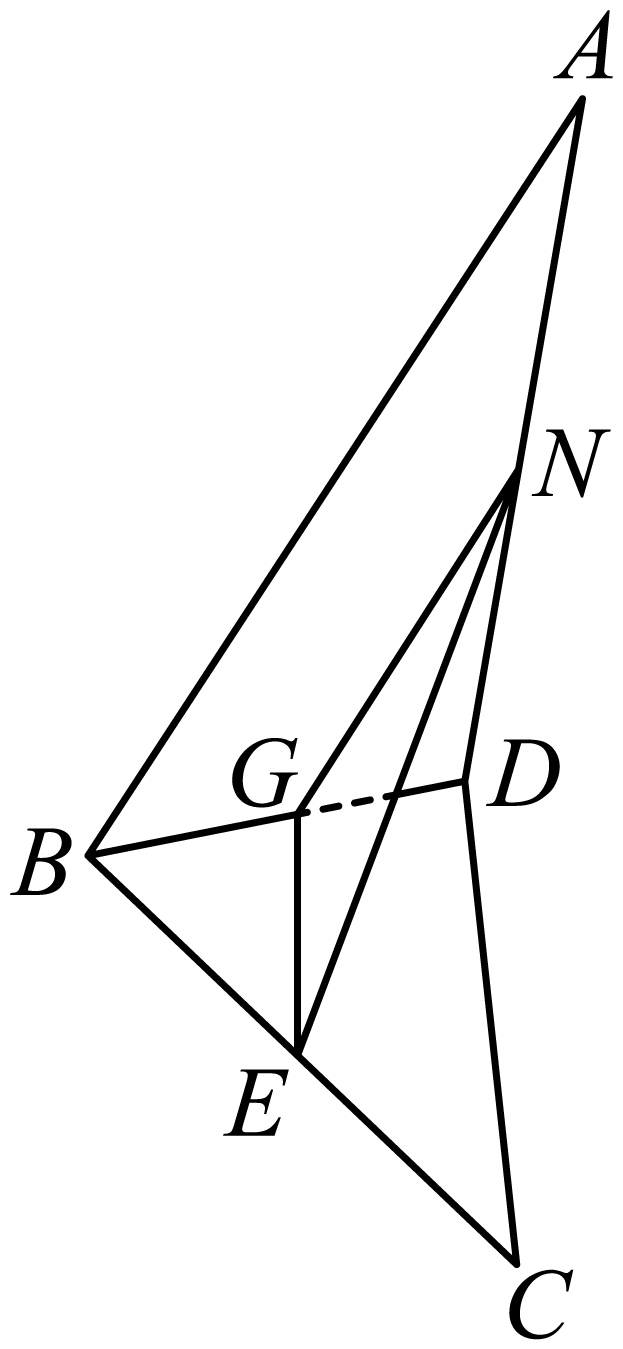
由于直线与直线相交于点，

即，平面，，平面，

又有平面平面，则，

所以，，三点共线.

（2）连接，作的中点，并连接，，如图所示：



在中，点，分别是和的中点，且，

所以，且，

在中，点，分别是和的中点，且，

所以，且，

则异面直线与所成的角等于直线与所成角，即或的补角，

又，由余弦定理得：，

故异面直线与所成的角为.