**13.2.2 空间两条直线的位置关系**

**【考点梳理】**

* **考点一：异面直线的概念理解**
* **考点二：异面直线的判定**
* **考点三：证明异面直线垂直**
* **考点四：求异面直线所成的角**
* **考点五：异面直线所成的角求其他量**
* **考点六：空间两条直线的综合问题**

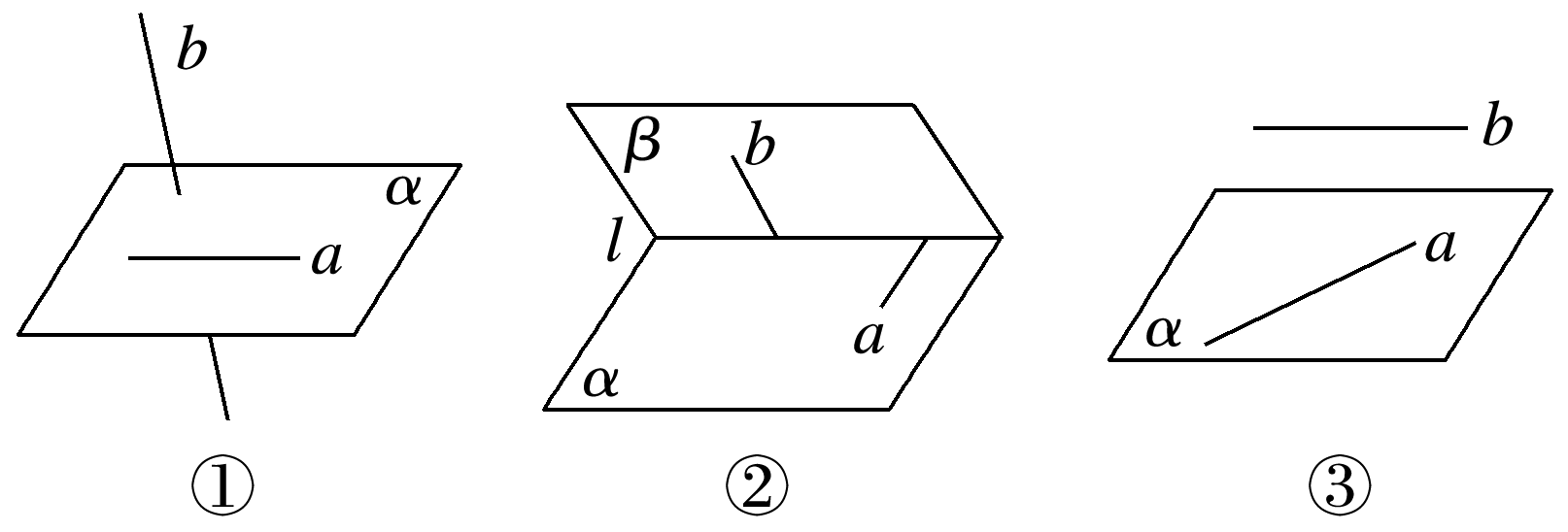
**【知识梳理】**

**知识点1：两直线的位置关系**

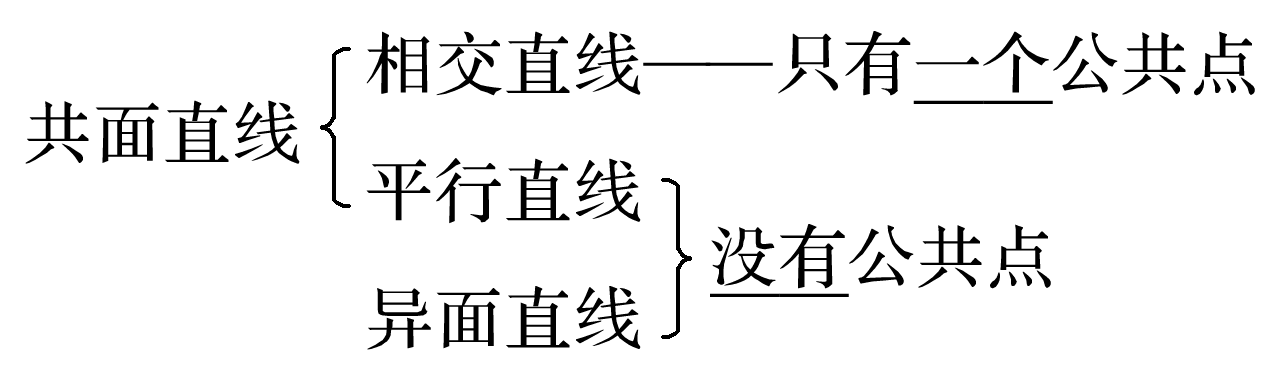
1.异面直线

(1)定义：不同在任何一个平面内的两条直线.

(2)画法：



2.两条直线的位置关系



3.两个定理

(1)基本事实4

①文字语言：平行于同一条直线的两条直线平行.

②符号语言：直线*a*，*b*，*c*，*a*∥*b*，*c*∥*b*⇒*a*∥*c*.

③作用：证明空间两条直线平行.

(2)等角定理

①内容：如果空间中两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

②作用：证明两个角相等或互补.

4.平面内两直线的夹角

(1)定义：平面内两条直线相交成4个角，其中不大于90°的角称为这两条直线所成的角(或夹角)；规定两直线平行时夹角为0°，垂直时夹角为90°.

(2)范围：两条直线夹角*α*的取值范围是0°≤*α*≤90°.

**知识点2：异面直线所成的角**

1.定义：已知两条异面直线*a*，*b*，经过空间任意一点*O*分别作直线*a*′∥*a*，*b*′∥*b*，则异面直线*a*与*b*所成的角(或夹角)就是直线*a*′与*b*′所成的锐角(或直角).

2.范围：0°<*θ*≤90°.特别地，当*θ*＝90°时，*a*与*b*互相垂直，记作*a*⊥*b*.

**【题型归纳】**

**题型一：异面直线的概念理解**

1．（22-23高一·全国）两条异面直线指的是（    ）

A．不同在任何一个平面内的两条直线

B．在空间内不相交的两条直线

C．分别位于两个不同平面内的直线

D．某一个平面内的一条直线和这个平面外的一条直线

2．（21-22高一下·安徽合肥·期中）异面直线是指（    ）

A．不同在任何一个平面内的两条直线

B．平面内的一条直线与平面外的一条直线

C．分别位于两个不同平面内的两条直线

D．空间中两条不相交的直线

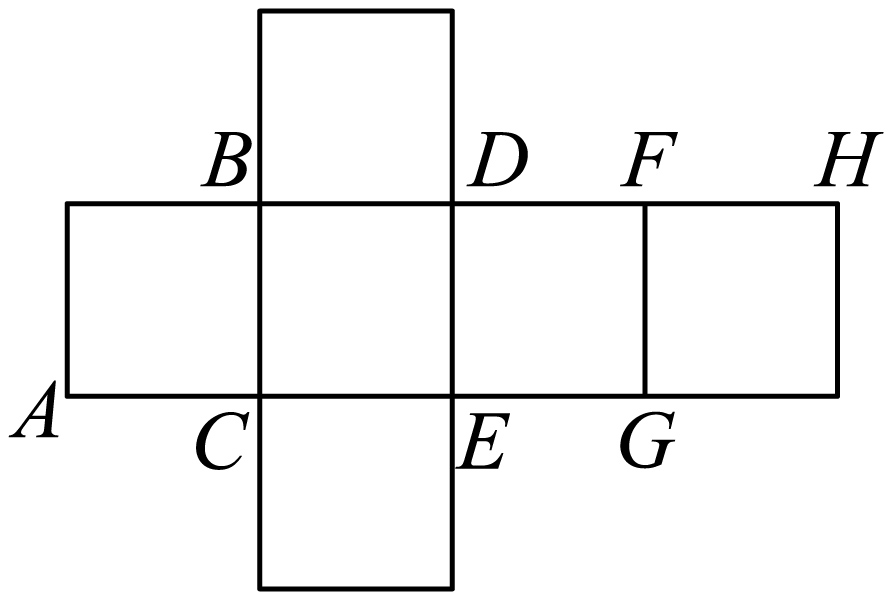
3．（20-21高一下·全国）已知，为不同的平面，*a*，*b*，*c*为不同的直线，则下列说法正确的是（    ）

A．若，，则*a*与*b*是异面直线 B．若*a*与*b*异面，*b*与*c*异面，则*a*与*c*异面

C．若*a*，*b*不同在平面内，则*a*与*b*异面 D．若*a*，*b*不同在任何一个平面内，则*a*与*b*异面

**题型二：异面直线的判定**

4．（23-24高一下·山西运城）如图是一个正方体的展开图，如果将它还原为正方体，下列命题正确的是（    ）



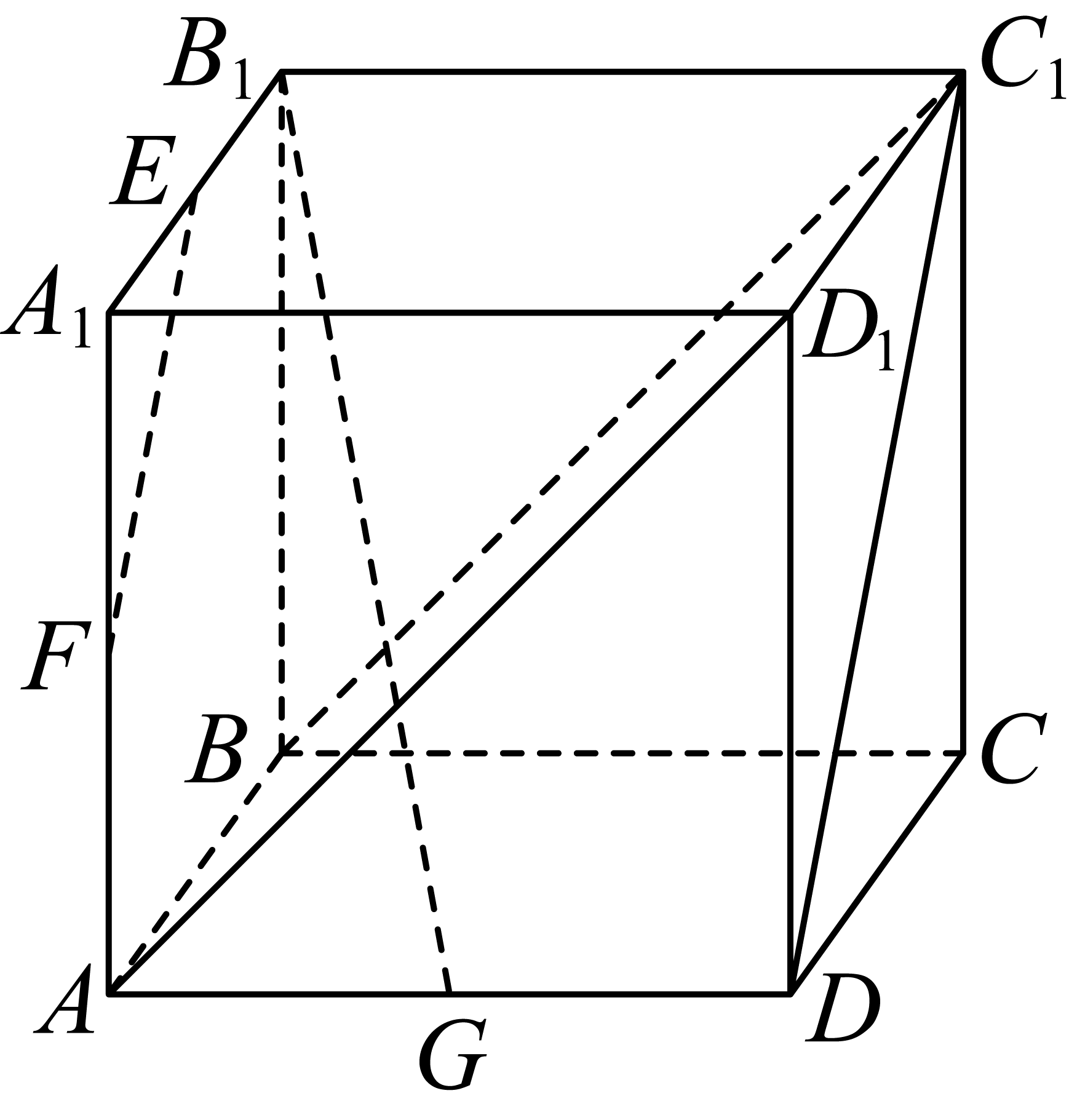
A．*AB*与*HG*相交 B．*AB*与*EF*平行

C．*AB*与*CD*相交 D．*EF*与*CD*异面

5．（23-24高一下·黑龙江佳木斯·期中）三棱柱中，、、分别是、、中点，则下列直线中与直线异面的直线为（    ）

A．直线 B．直线 C．直线 D．直线

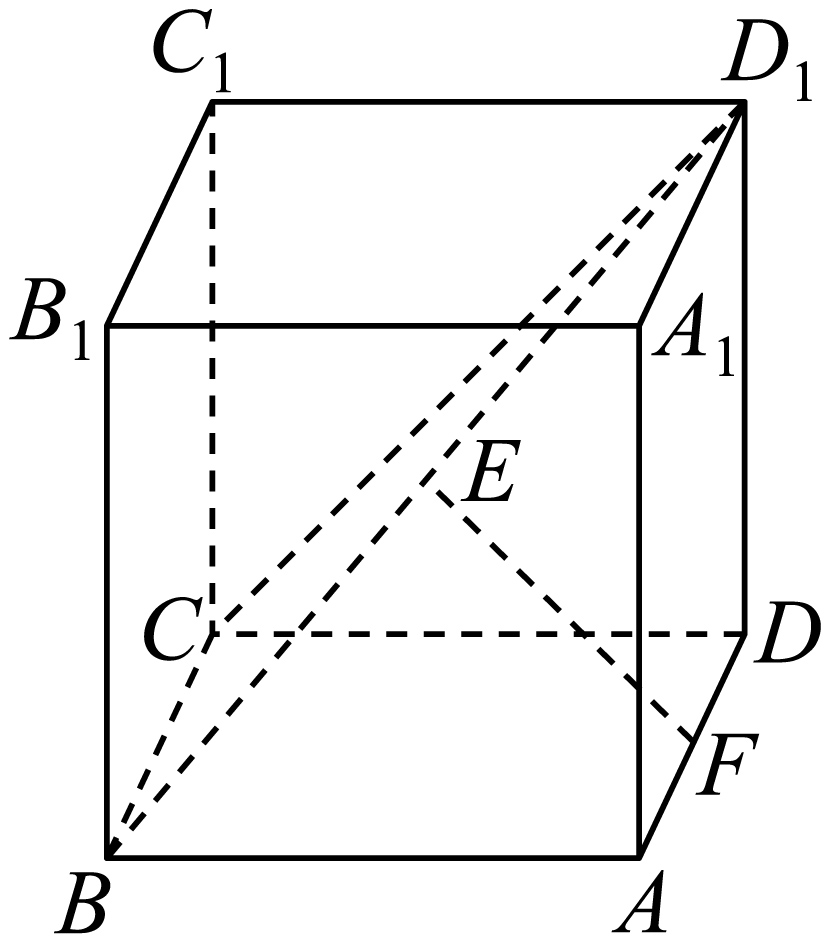
6．（23-24高一下·浙江·期中）已知正方体，、、分别为、、的中点，则图中与直线异面的直线是（    ）



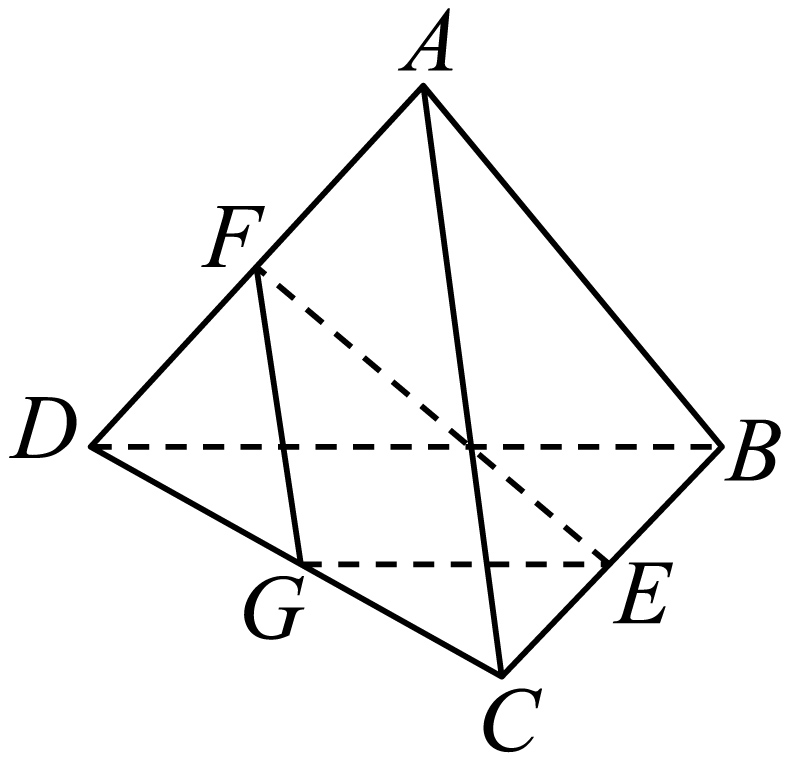
A． B． C． D．

**题型三：证明异面直线垂直**

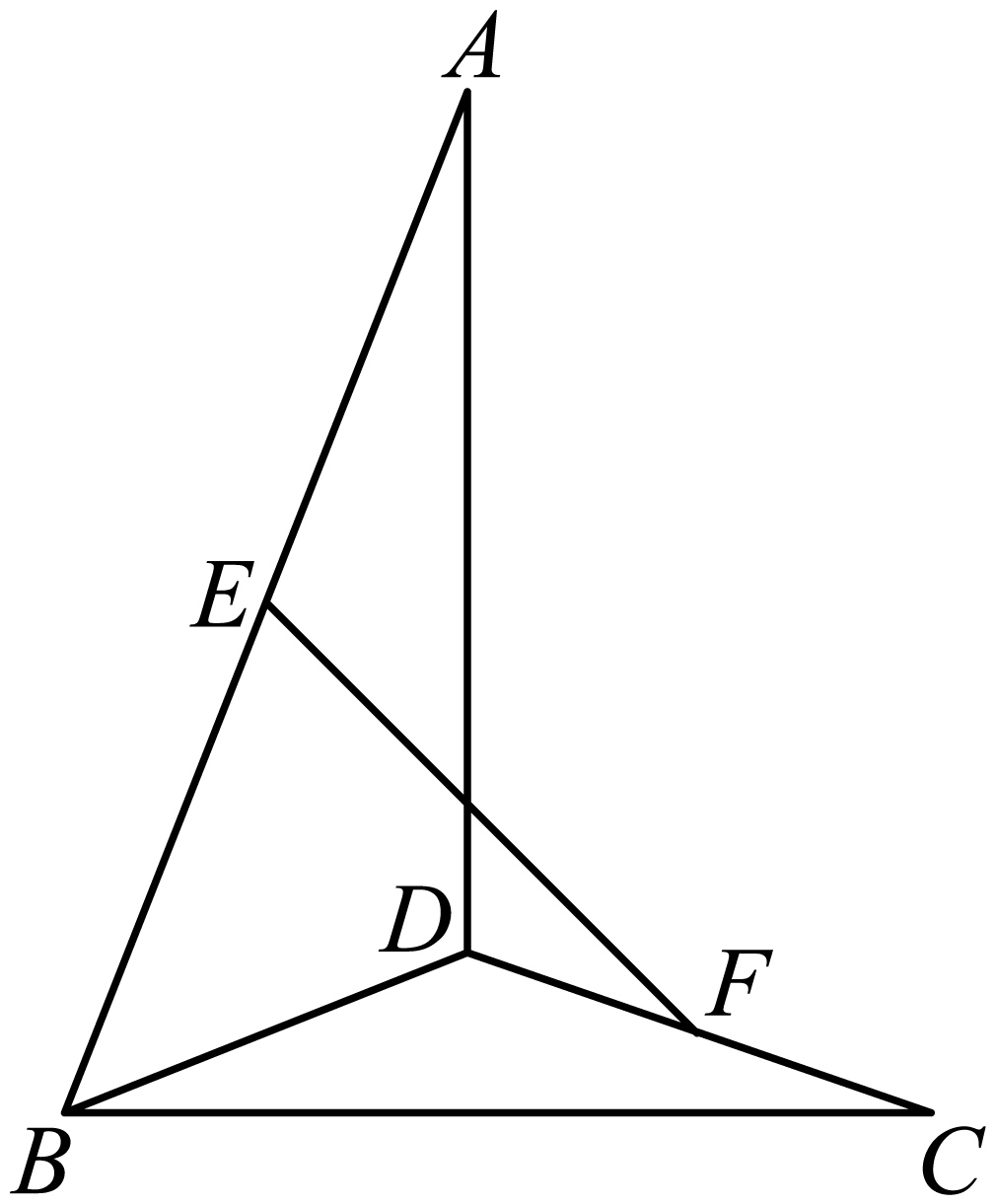
7．（2024高一·全国）如图，已知长方体*ABCD*－*A1B1C1D1*中，*A1A*＝*AB*，*E*，*F*分别是*BD1*和*AD*的中点，求证：*CD1*⊥*EF*.



8．（23-24高一·全国）空间四边形*ABCD*，*E*，*F*，*G*分别是*BC*，*AD*，*DC*的中点，*FG*＝2，*GE*＝，*EF*＝3.求证：*AC*⊥*BD*.



9．（23-24高一·全国）如图所示，在空间四边形*ABCD*中，*AD*=*BC*=2，*E*，*F*分别是*AB*，*CD*的中点，*EF*=*．*求证：*AD*⊥*BC．*



**题型四：求异面直线所成的角**

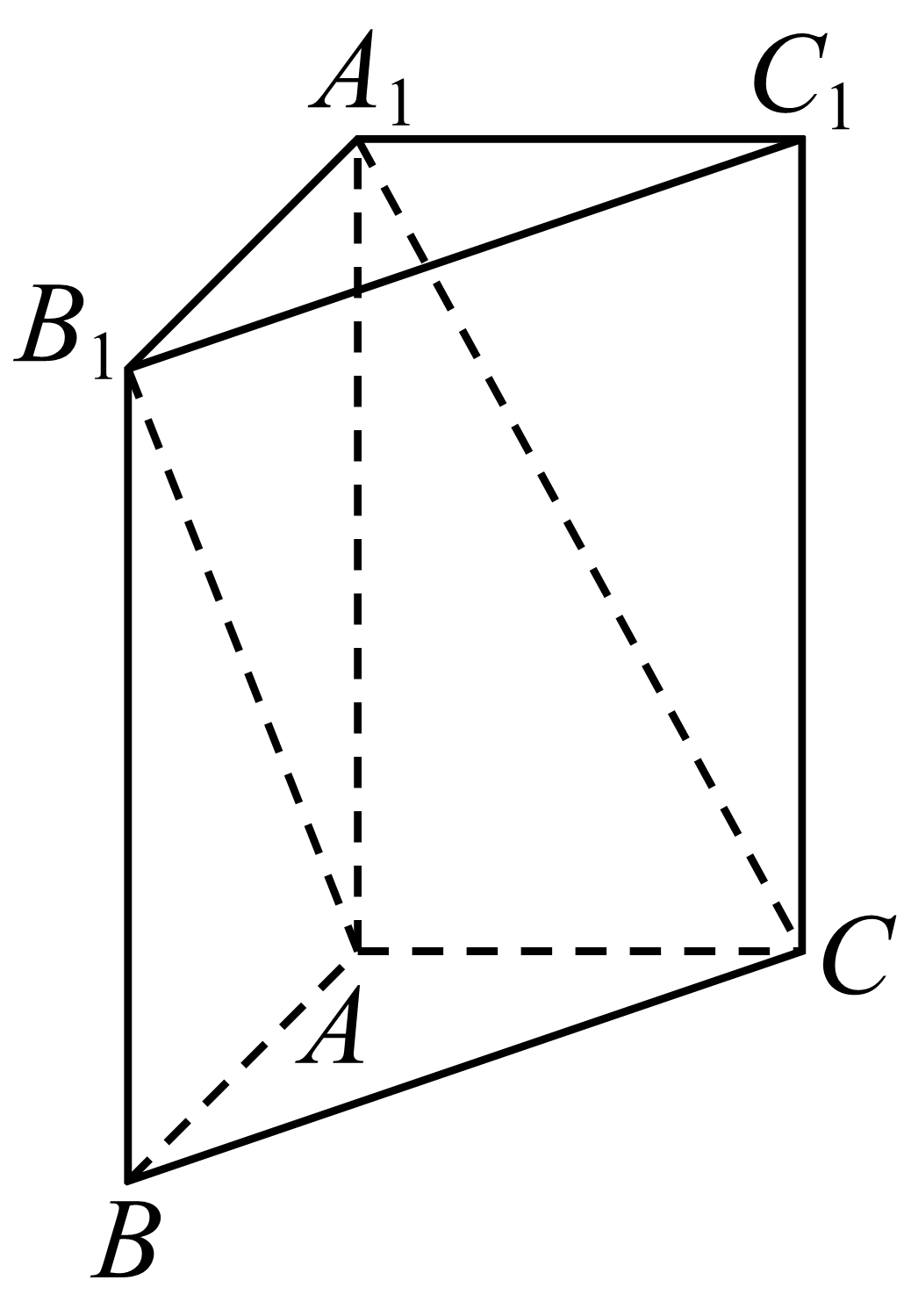
10．（23-24高一下·江苏盐城）在正三棱柱中，，为棱的中点，则异面直线与所成角的余弦值为（    ）

A． B． C． D．

11．（23-24高一下·江苏南通·期中）在圆锥*PO*中，轴截面*PAB*为等腰直角三角形，*M*为底面圆*O*上一点，，则异面直线*OM*与*AP*所成角的余弦值为（    ）

A． B． C． D．

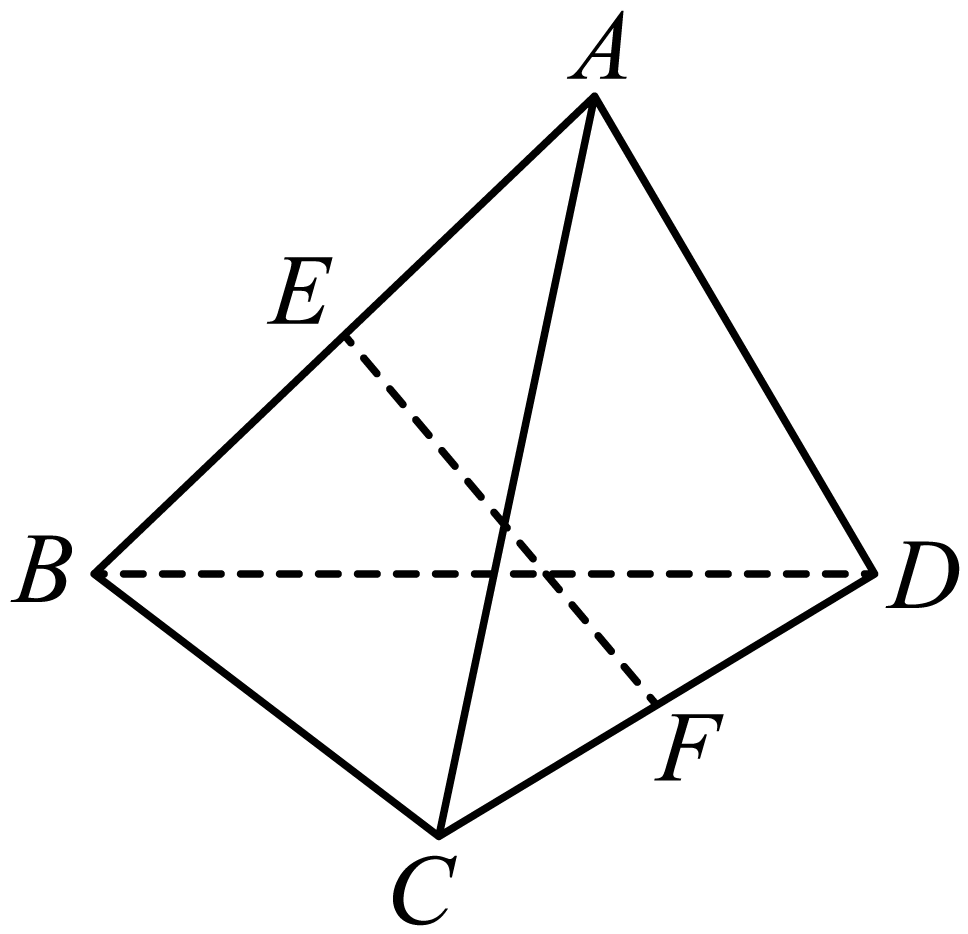
12．（2024·陕西西安·一模）如图，在直三棱柱中，为等腰直角三角形，且，则异面直线与所成角的正弦值为（    ）



A． B． C． D．

**题型五：异面直线所成的角求其他量**

13．（22-23高一下·陕西宝鸡）如图，在四面体中，、分别为、的中点，若、所成的角为，且，则的长为（    ）



A． B． C． D．或

14．（21-22高一下·山东淄博·期末）在空间四边形中，，，，分别是，，，的中点．若，且与所成的角为，则的长为（    ）

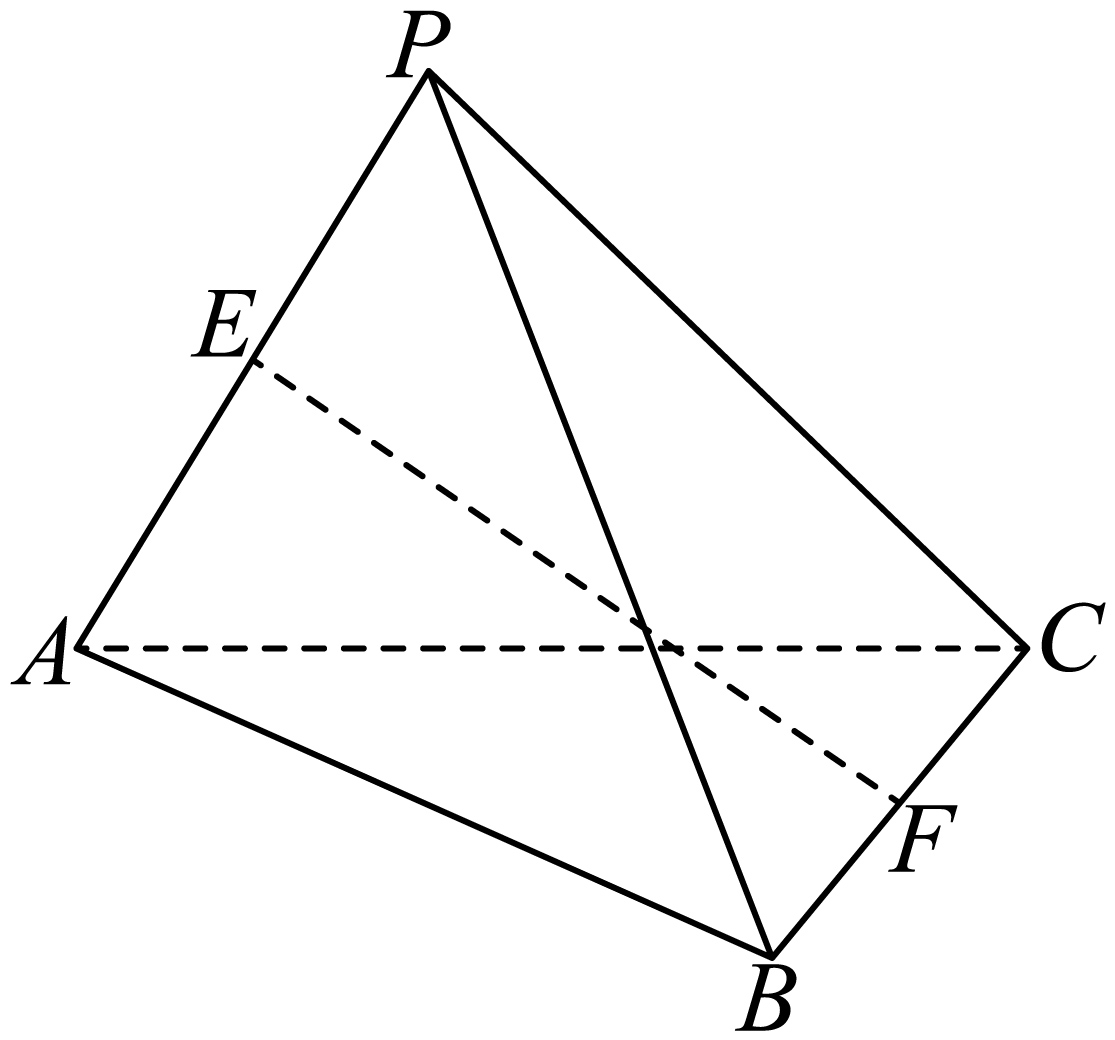
A．1 B． C．1或 D．或

15．（21-22高一下·安徽六安·期中）在空间四边形中，*E*，*F*，*G*，*H*分别是，，，的中点，若，且与所成的角为60°，则的长为（    ）

A．1或 B．或 C．1或 D．或

**题型六：空间两条直线的综合问题**

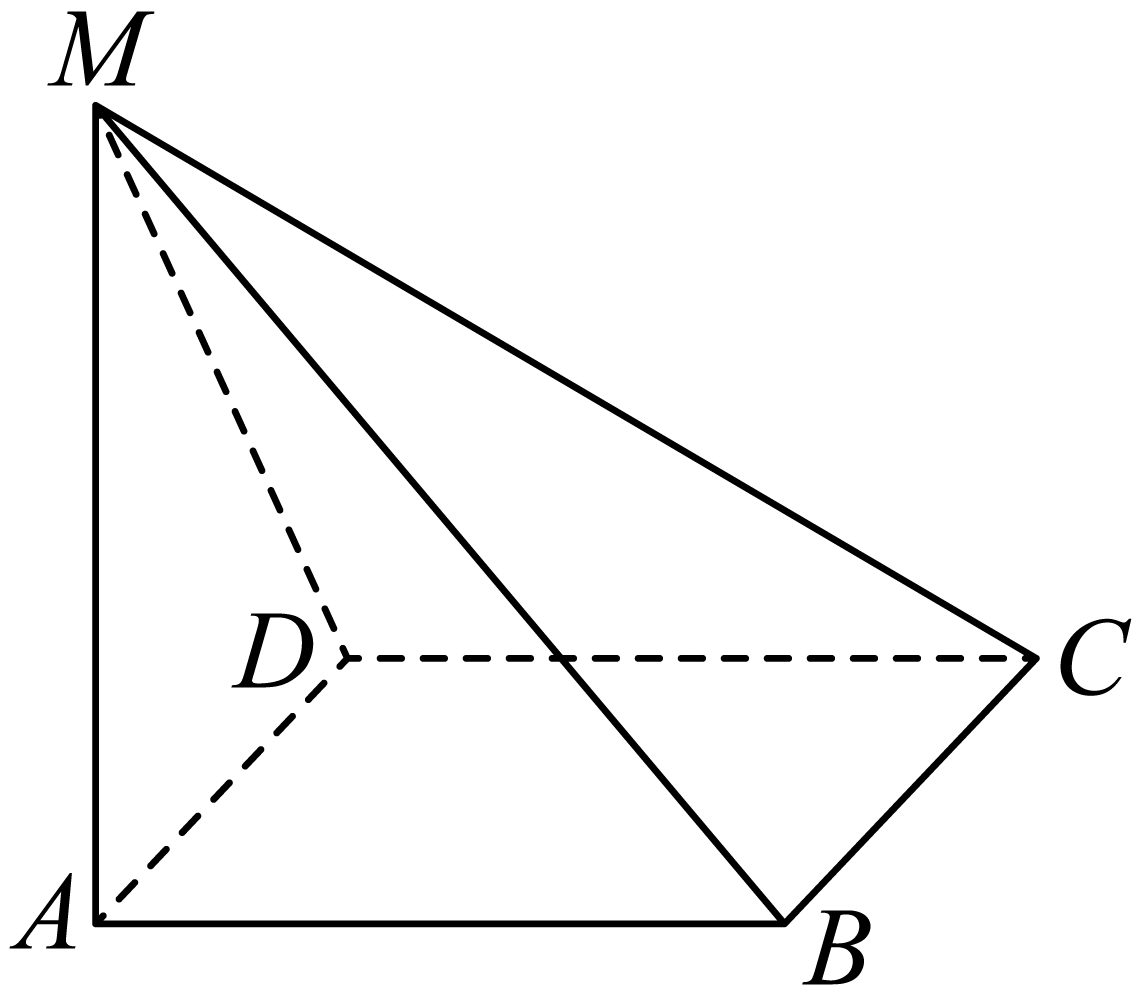
16．（2024高三·全国）已知*P*为所在平面外一点，，，*E*，*F*分别是*PA*和*BC*的中点．



(1)求证：*EF*与*PC*是异面直线；

(2)求*EF*与*PC*所成的角．

17．（23-24高二上·黑龙江鸡西·期末）如图，平面，四边形是正方形，且，试求：



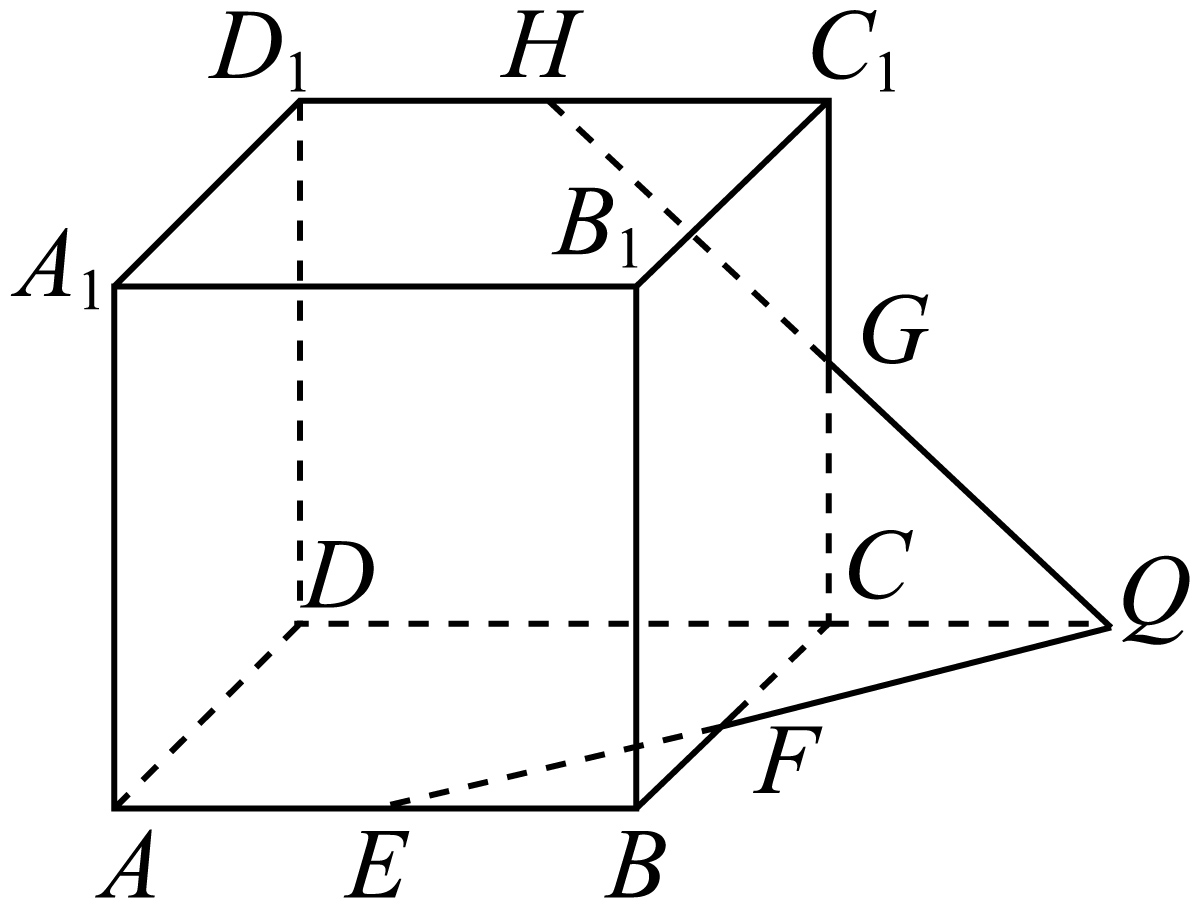
(1)点到的距离；

(2)求异面直线与所成的角.

18．（23-24高二上·上海·期中）如图，已知分别是正方体的棱的中点，且与相交于点．

(1)求证：点*Q*在直线*DC*上；

(2)求异面直线与所成角的大小．



**【双基达标】**

**一、单选题**

1．（23-24高一下·江苏扬州）下列说法正确的是（    ）

A．若空间两直线没有公共点，则这两条直线异面；

B．与两条异面直线都相交的两直线可能是异面直线，也可能是相交直线；

C．空间三点确定一个平面；

D．过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线垂直．

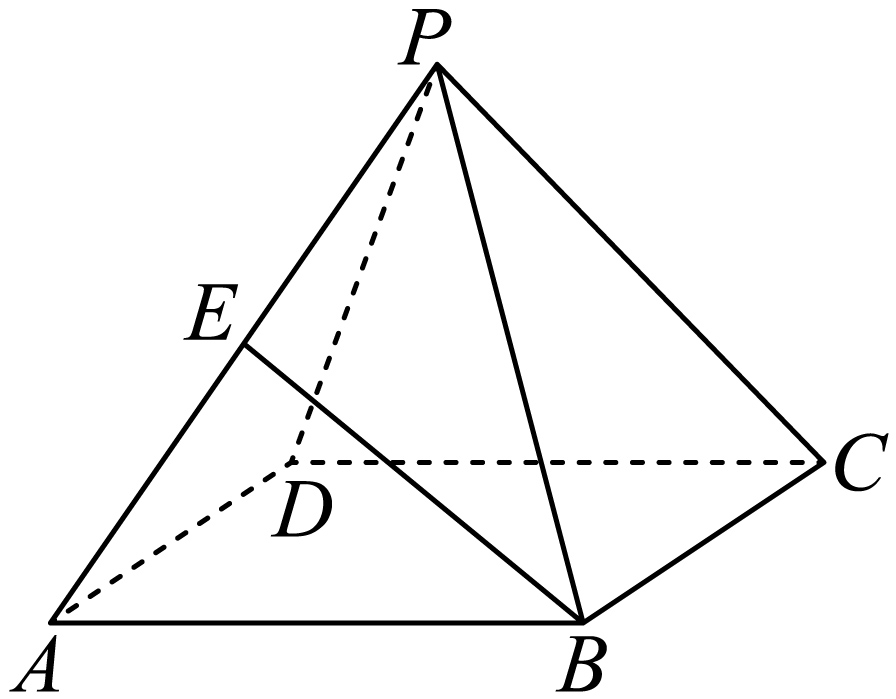
2．（23-24高一下·江苏无锡·期中）正方体中，为的中点，则直线与直线所成角为（    ）

A． B． C． D．

3．（23-24高一下·江苏镇江·期末）正方体中，，分别为棱，中点，则与所成角为（    ）

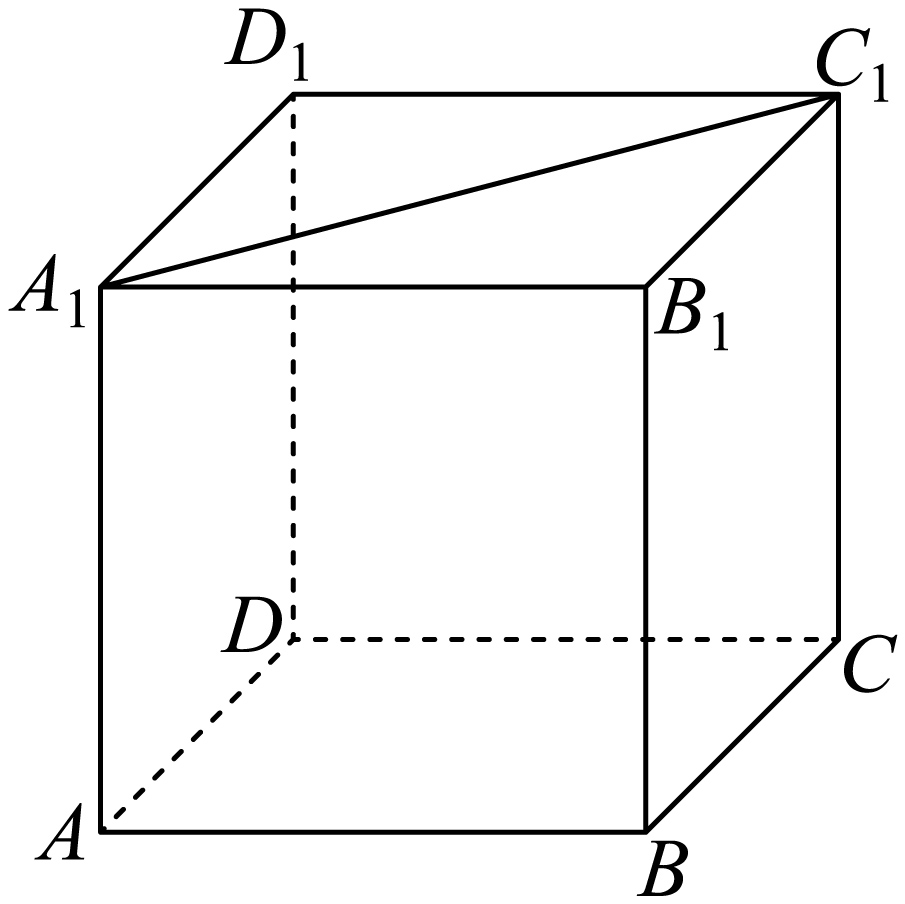
A． B． C． D．

4．（23-24高二下·山东烟台·阶段练习）如图，已知正四棱锥的所有棱长均为2，为棱的中点，则异面直线与所成角的余弦值为（    ）.



A． B． C． D．

5．（2023·上海·模拟预测）如图所示，在正方体中，点为线段上的动点，则下列直线中，始终与直线异面的是（   ）



A． B． C． D．

6．（2024高三·全国·专题练习）下列命题中，真命题的个数是（　　）

① 分别在两个平面内的两条直线是异面直线；

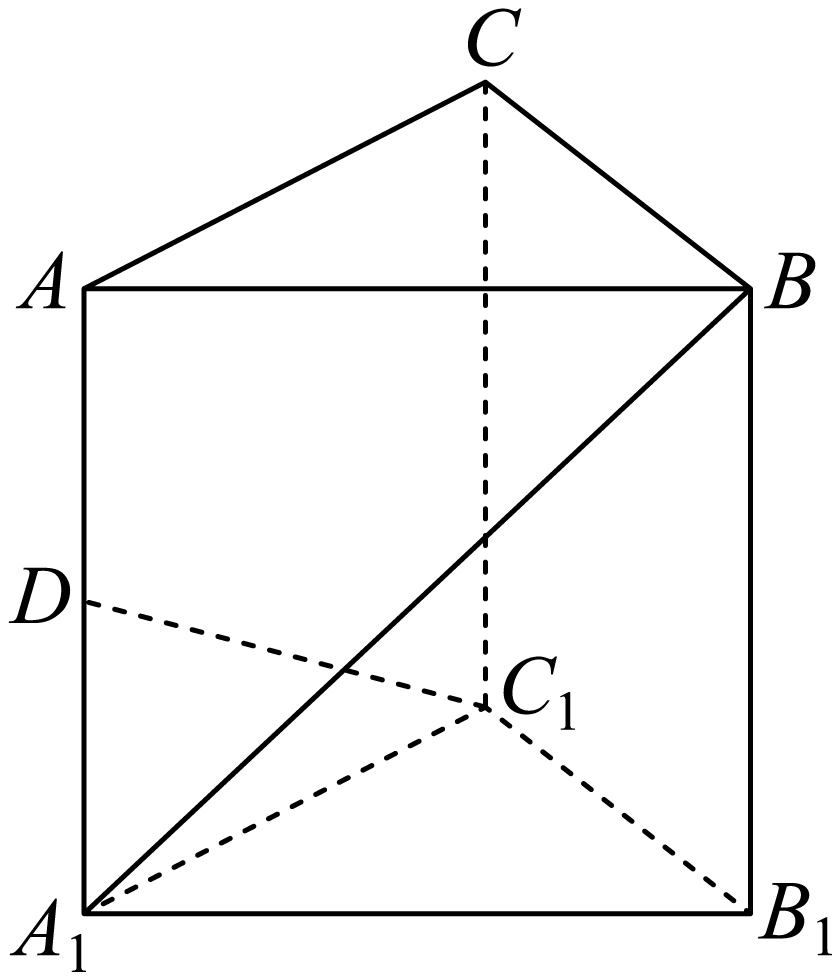
② 和两条异面直线都垂直的直线有且只有一条；

③ 和两条异面直线都相交的两条直线必定异面；

④ 与同一条直线都异面的两条直线也是异面直线．

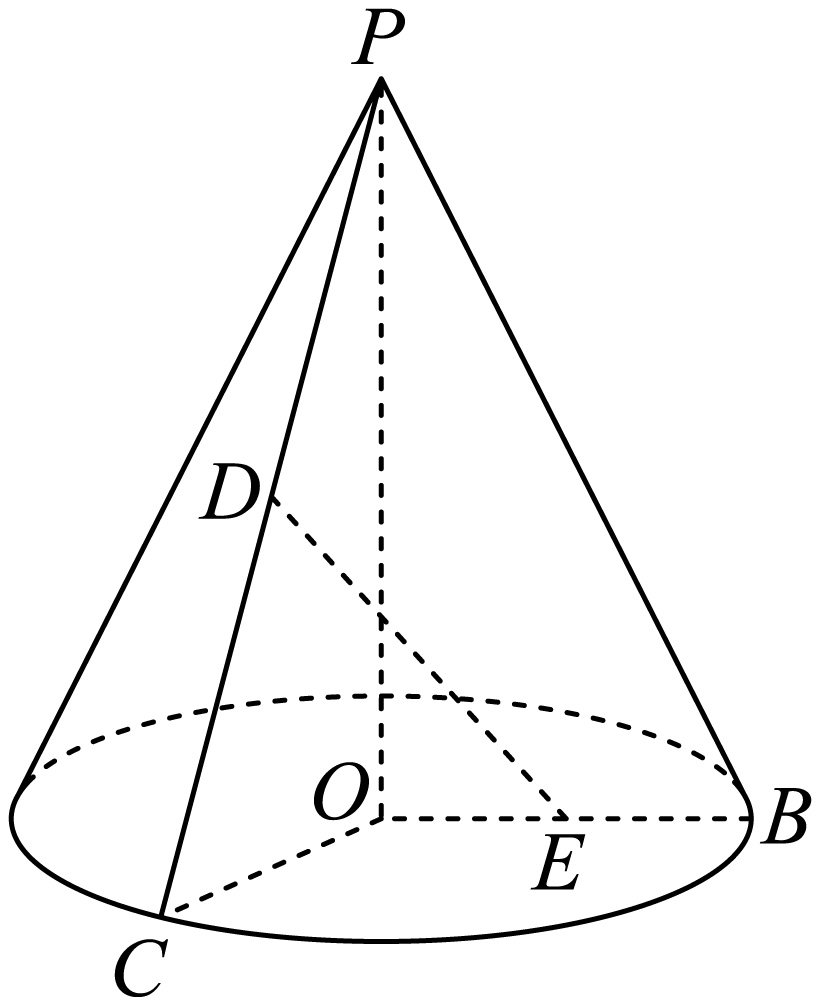
A．0 B．1 C．2 D．3

7．（23-24高二上·山西吕梁·期末）如图，正三棱柱的各棱长相等，为的中点，则异面直线与所成角的余弦值为（　　）



A． B． C． D．0

8．（2024·全国·模拟预测）如图,在圆锥中,,为圆上的点,且,,若为的中点,为的中点,则异面直线与所成角的余弦值为（    ）



A． B．

C． D．

9．（22-23高一下·河南洛阳）下列命题中，真命题有（    ）

①如果两条相交直线与另外两条相交直线分别平行，那么这两条相交直线和另外两条相交直线所成的锐角或直角相等；

②如果一个角的两边和另一个角的两边分别垂直，那么这两个角相等或互补；

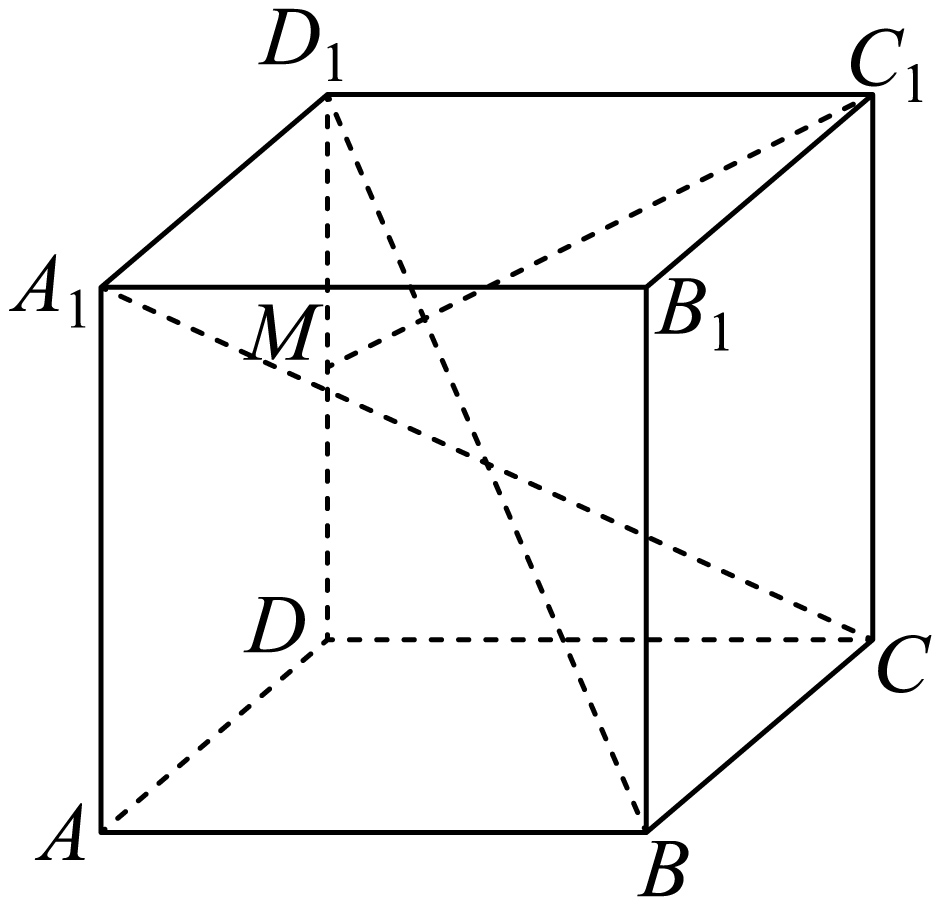
③分别在两个不同的平面内且没有公共点的直线互相平行；

④，若，，则或.

A．1个 B．2个 C．3个 D．4个

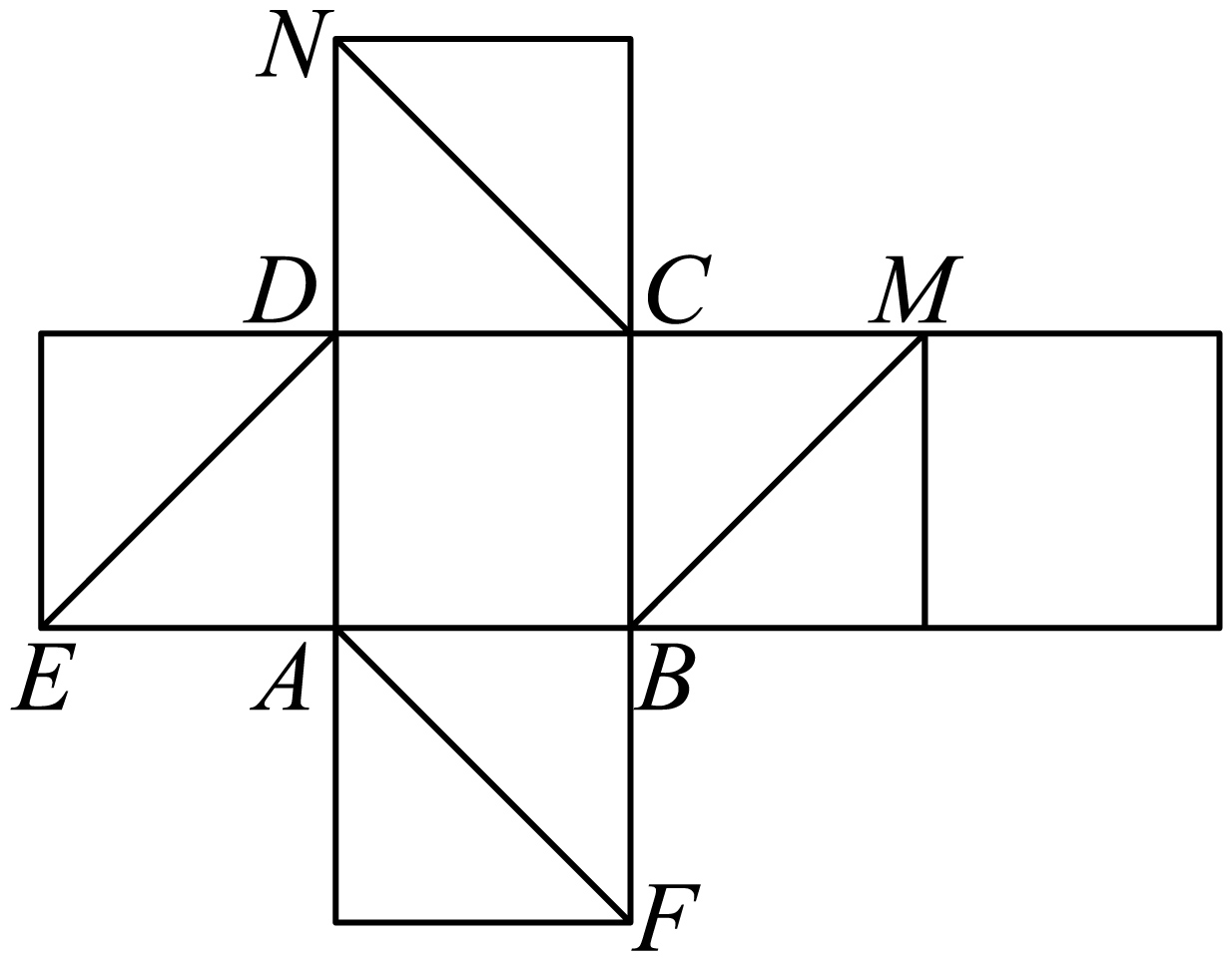
**二、多选题**

10．（22-23高一下·河南·期中）已知正方体中，*M*为的中点，则下列直线中与直线是异面直线的有（    ）



A． B． C． D．

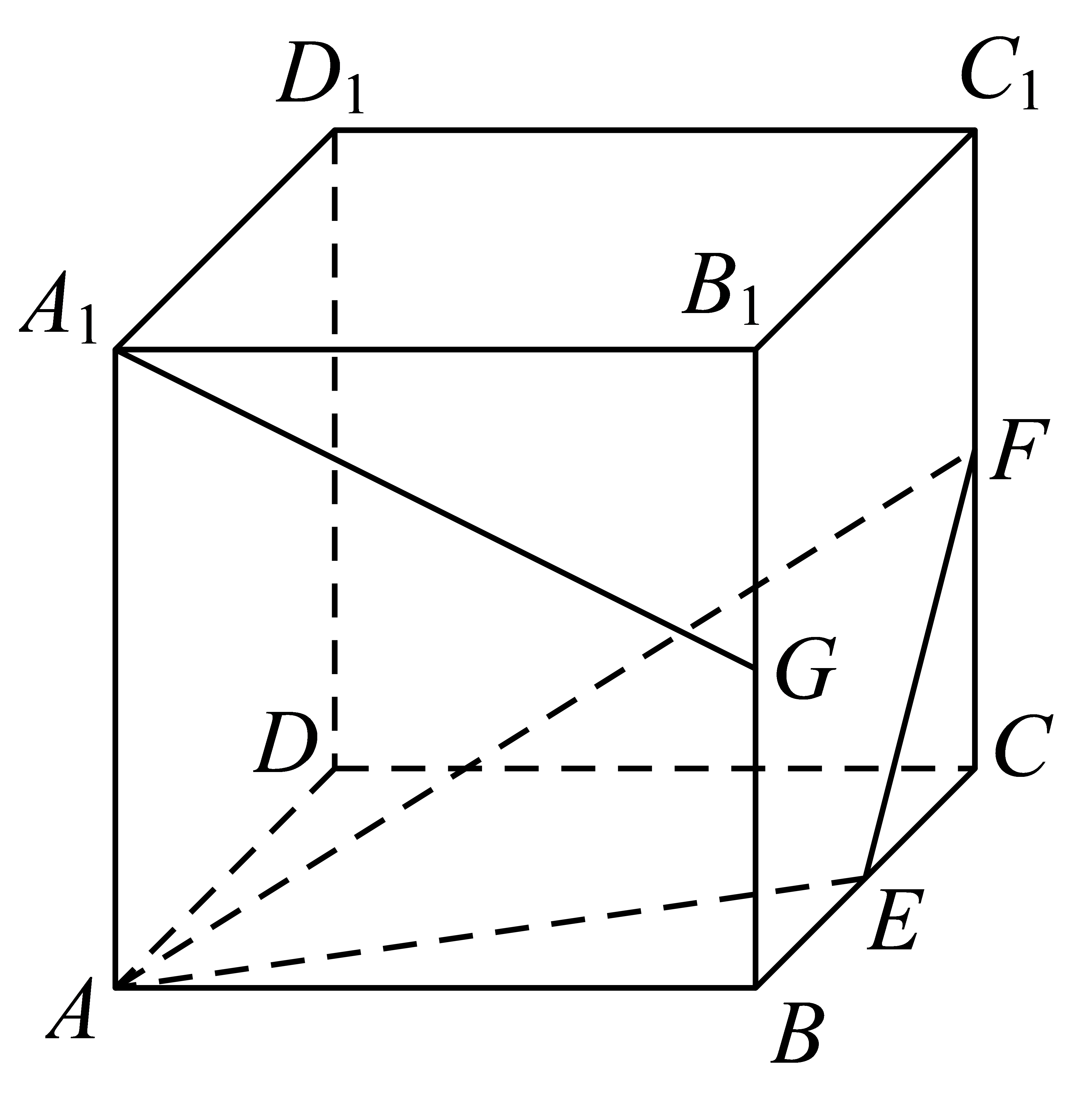
11．（22-23高一下·陕西西安·期末）如图是一个正方体的平面展开图，在这个正方体中，下列说法中正确的序号是（    ）



A．直线与直线相交； B．直线与直线平行；

C．直线*BM*与直线是异面直线； D．直线与直线成角.

12．（22-23高三上·广东湛江·阶段练习）正方体的棱长为，分别为的中点.则下列说法正确的是（    ）

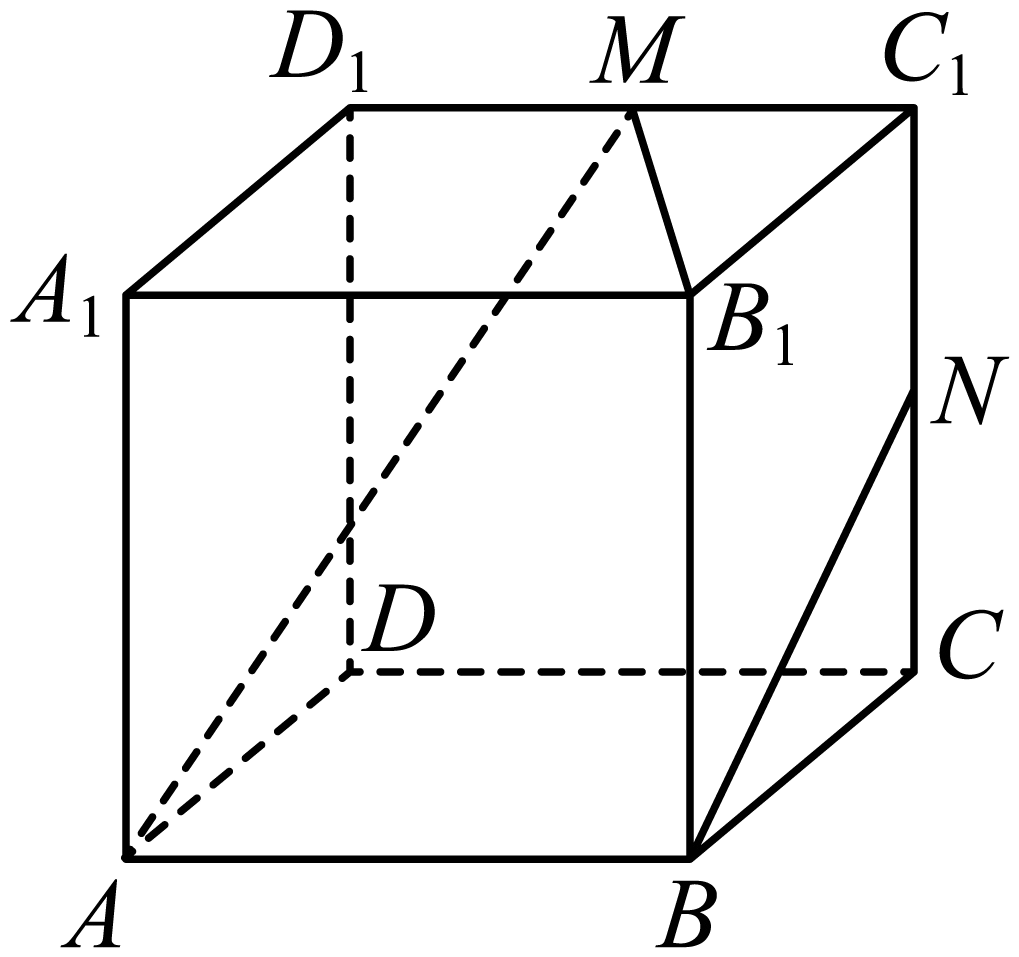


1. 直线与平面平行
2. B．直线与直线垂直

C．异面直线与所成角的余弦值为

D．平面截正方体所得的截面面积为

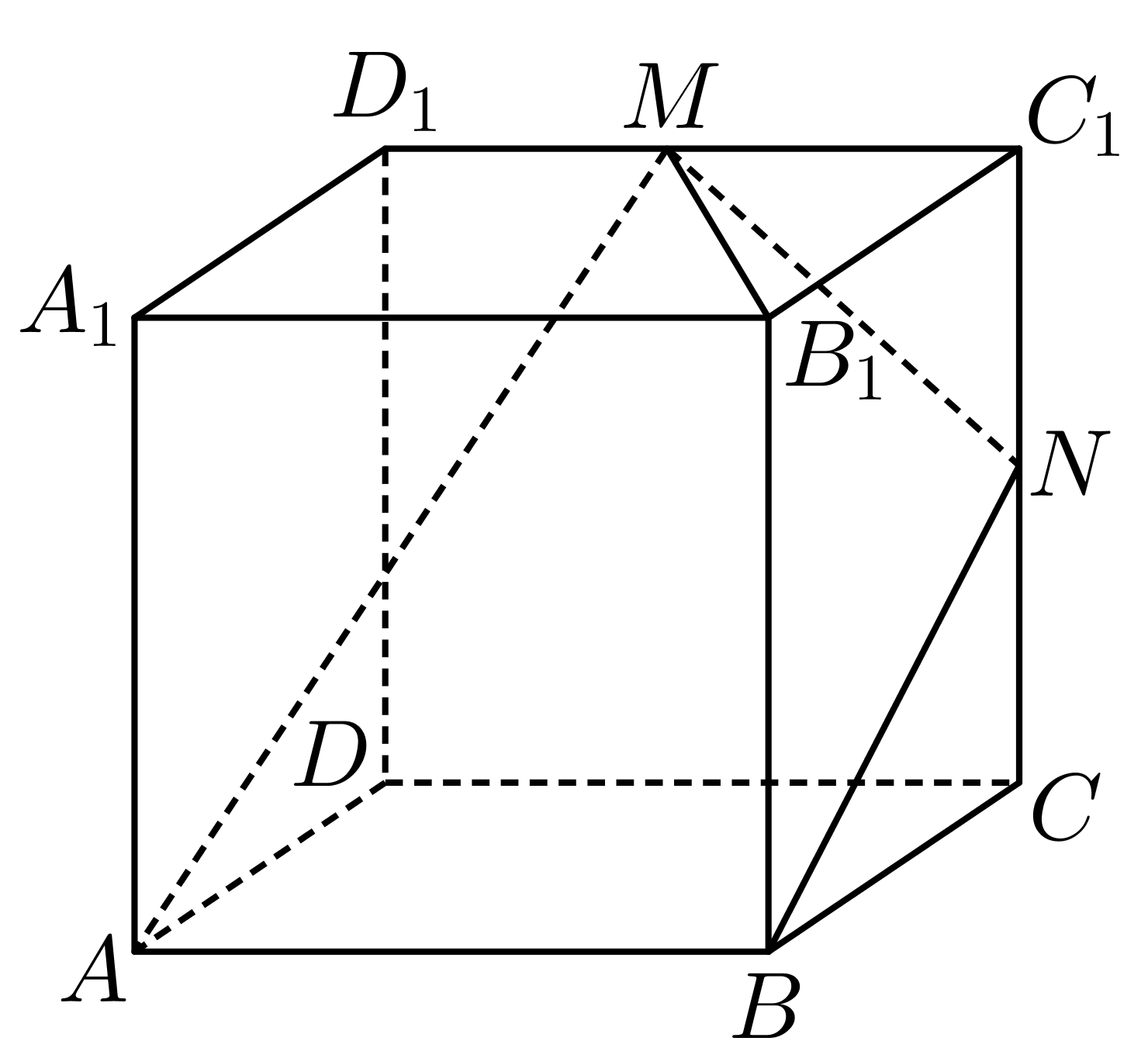
13．（19-20高一下·全国）如图所示，在正方体中，，分别为棱，的中点，则下列四个结论正确的是（    ）



A．直线与是相交直线 B．直线与是平行直线

C．直线与是异面直线 D．直线与是异面直线

14．（20-21高三上·山东菏泽·期中）如图所示，在棱长为2的正方体*ABCD*－*A1B1C1D1*中，*M*，*N*分别为棱*C1D1*，*C1C*的中点，则下列结论正确的是（    ）



A．直线*AM*与*BN*是平行直线

B．直线*BN*与*MB1*是异面直线

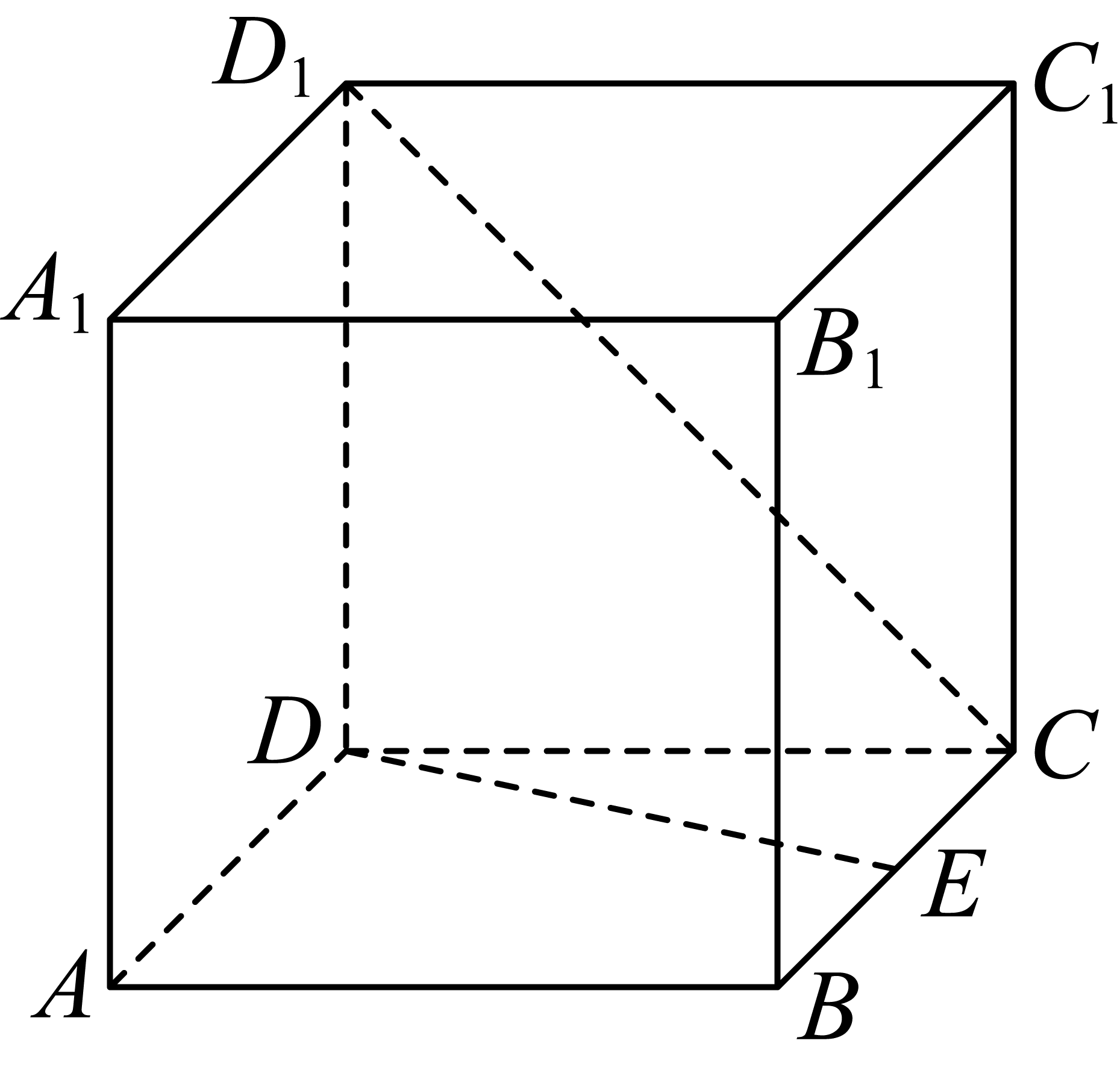
C．直线*MN*与*AC*所成的角为60°

D．平面*BMN*截正方体所得的截面面积为

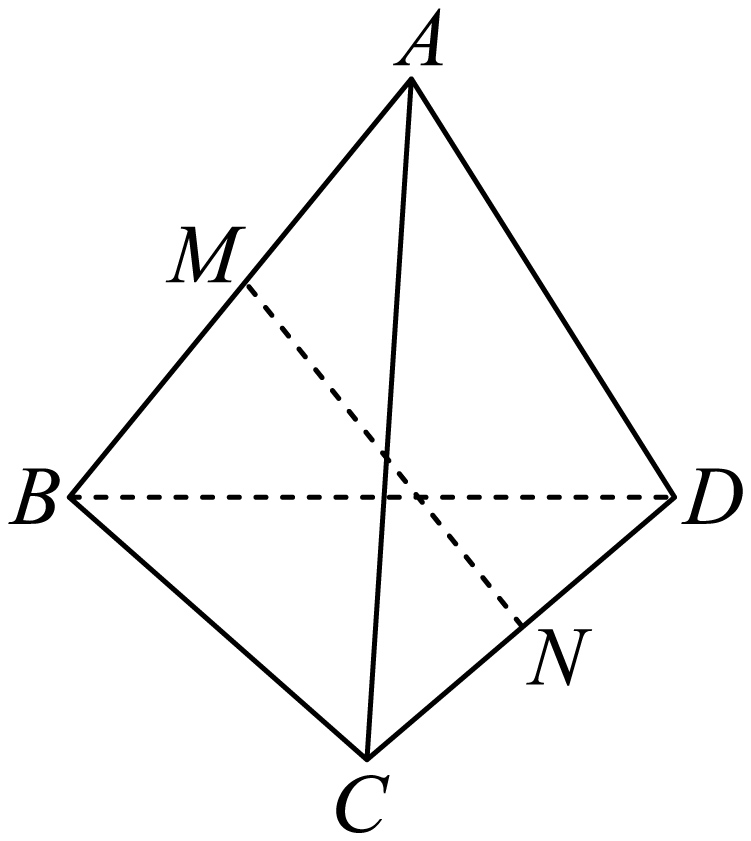
**三、填空题**

15．（23-24高一下·江苏南通·期中）已知空间四边形的对角线，，，分别为，的中点，若，则异面直线，所成角为 ．

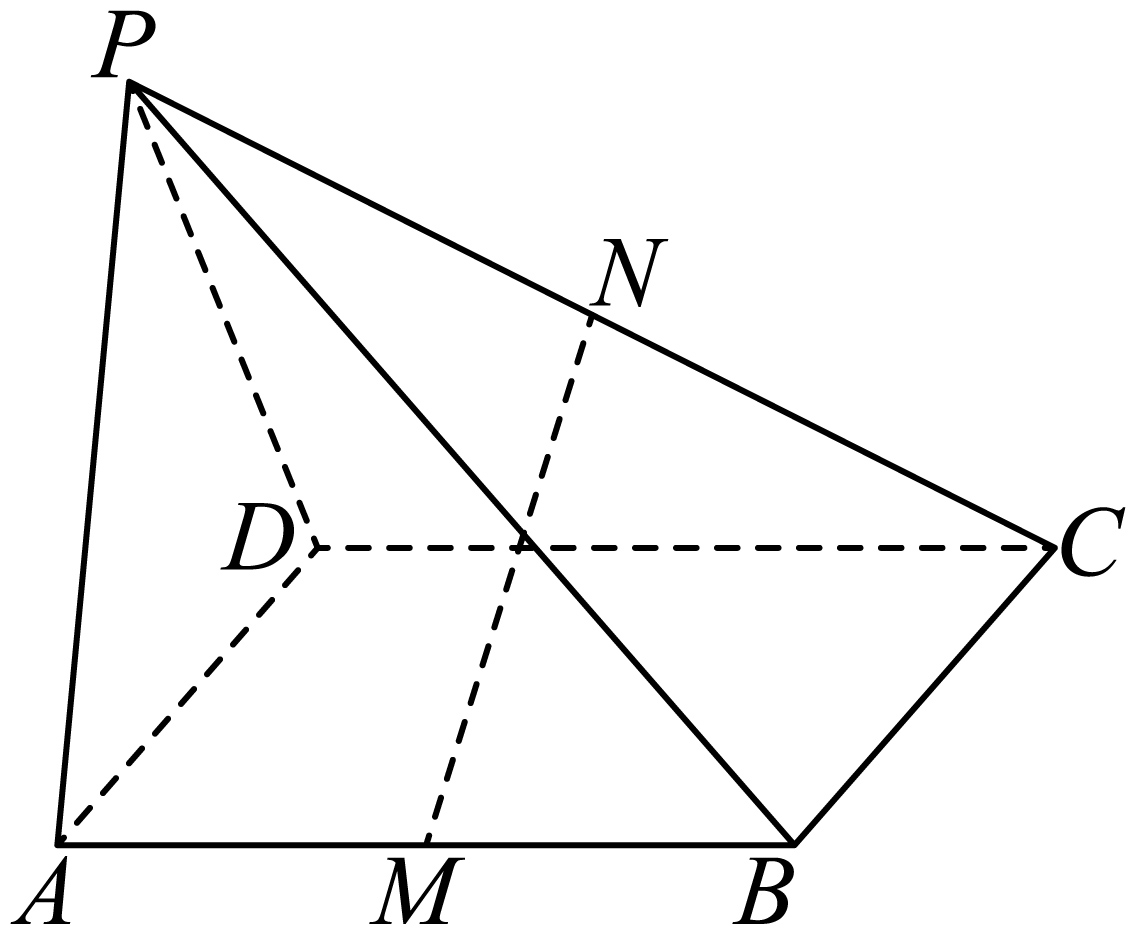
16．（23-24高一下·江苏连云港·期中）如图，在正方体中，是的中点，求与两条异面直线所成角的正弦值为



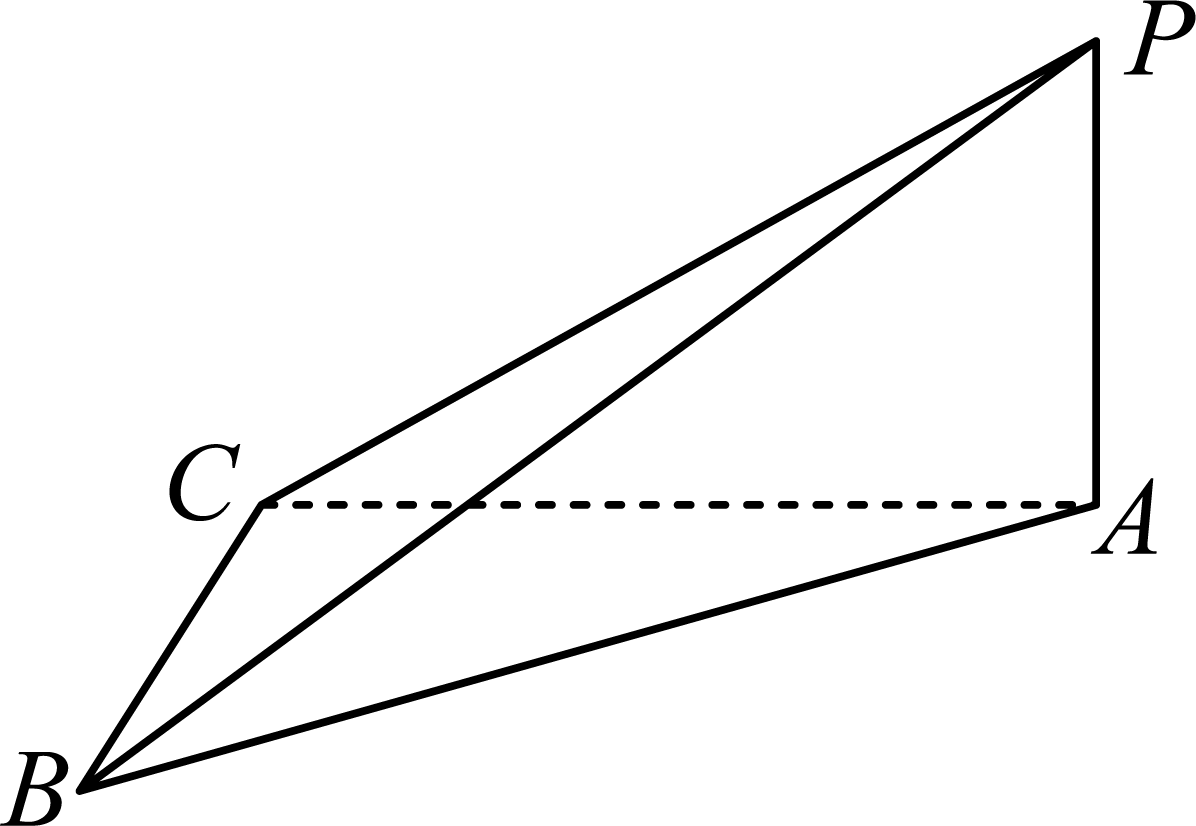
17．（23-24高一下·浙江杭州·期中）如图，在四面体中，与所成的角为，分别为的中点，则线段的长为 .



18．（21-22高二·全国）如图，在四棱锥中，底面是平行四边形，*M*，*N*分别是，的中点，若，，则异面直线与所成角大小是 ．



19．（22-23高一下·山西·期末）如图，在四面体中，点在平面上的射影是，，若，，则异面直线*PC*与*AB*所成角的余弦值为 ．



**四、解答题**

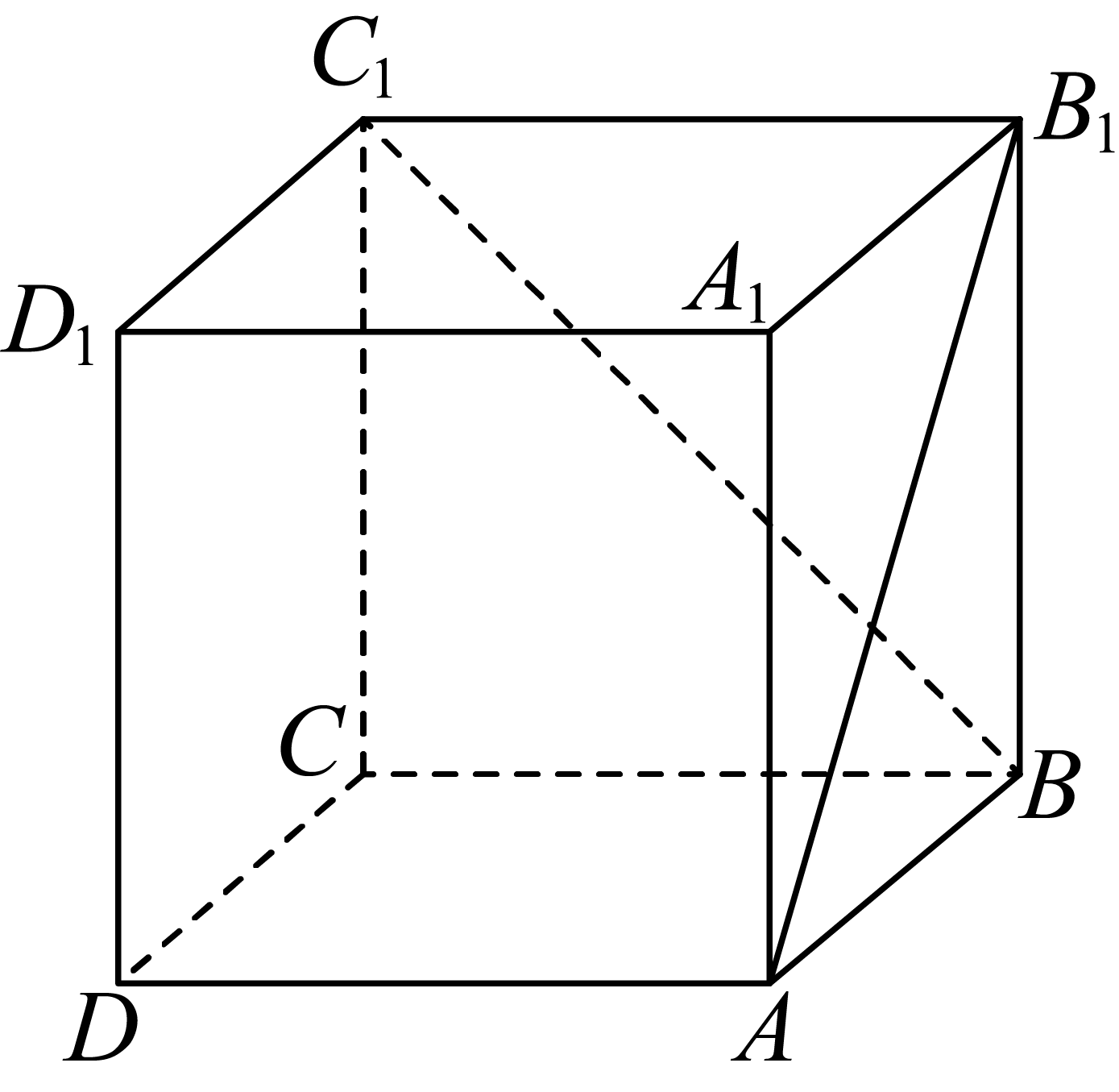
20．（23-24高二上·四川自贡）如图，在正方体中，点*E*，*F*分别为棱，*AB*的中点．



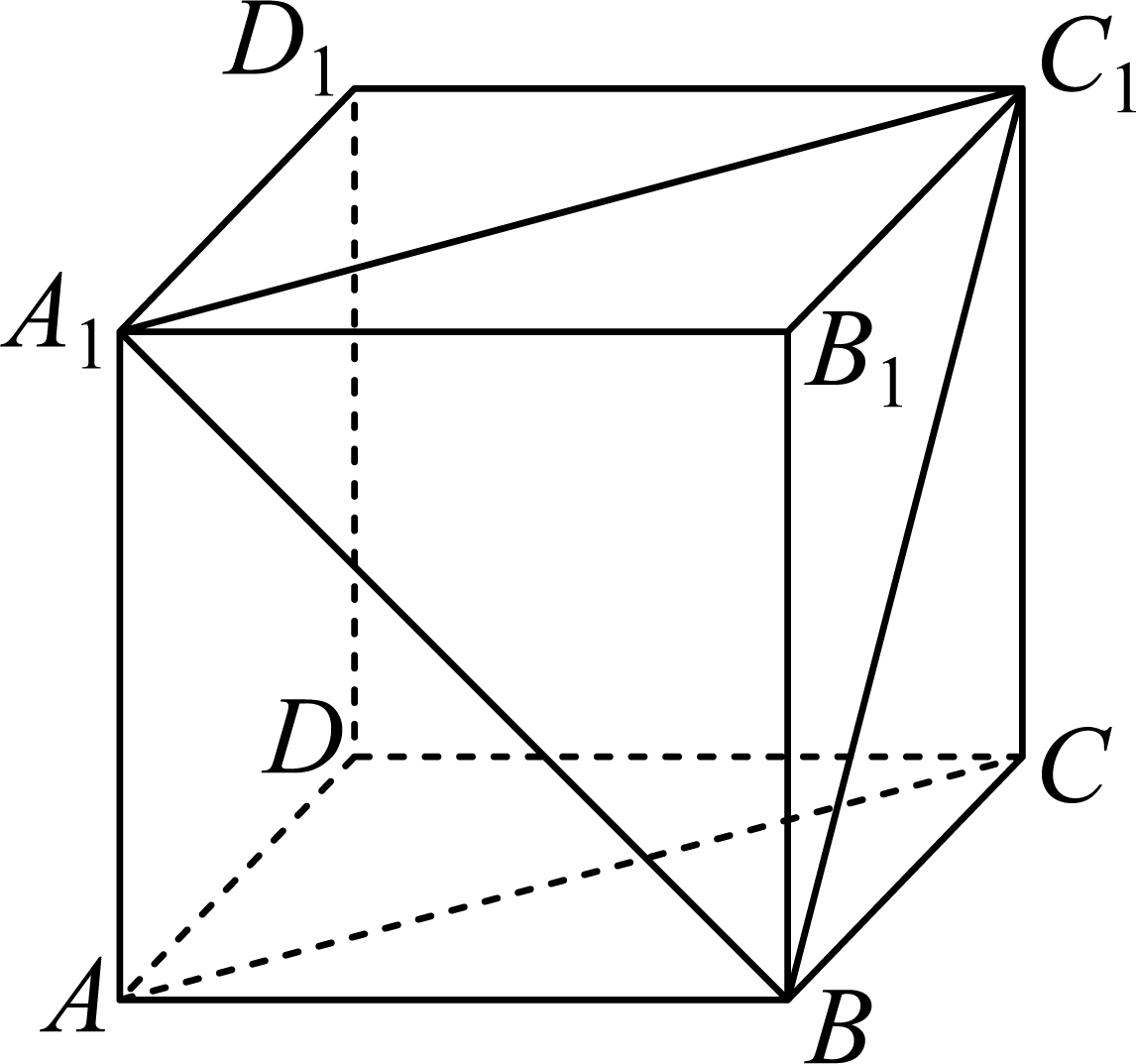
(1)求证：*E*、*F*、*C*、四点共面：

(2)求异面直线与*BC*所成角的余弦值．

21．（23-24高二上·新疆阿克苏·阶段练习）如图，在正方体中，求异面直线与所成的角的大小；



22．（22-23高一·全国·课堂例题）如图，已知是棱长为*a*的正方体．



(1)求异面直线与*BC*所成的角；

(2)求异面直线与*AC*所成的角．

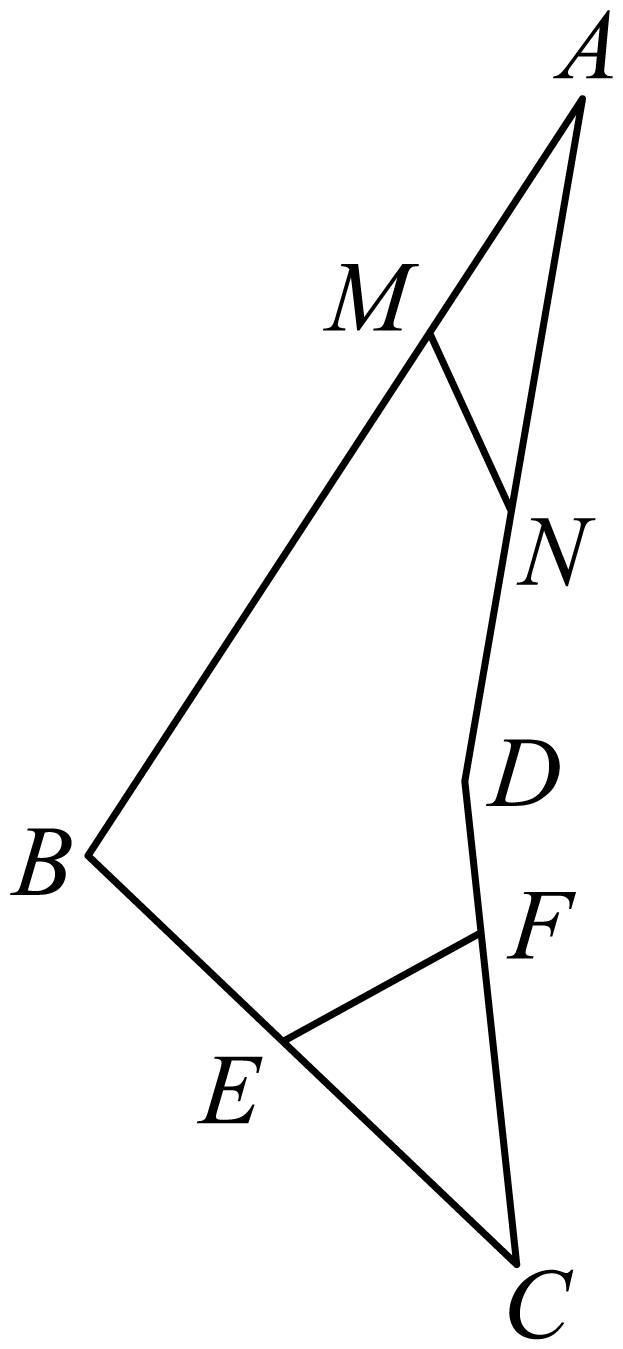
23．（22-23高一·全国·单元测试）如图所示，在四面体中，*E*、*F*分别是线段*AD*、*BC*上的点，．



(1)求证：直线与是异面直线；

(2)若，，求、所成角的大小．

24．（22-23高二上·上海黄浦）已知是空间四边形，如图所示（，，，分别是、、、上的点）．



(1)若直线与直线相交于点，证明，，三点共线；

(2)若，为，的中点，，，，求异面直线与所成的角．