**第三章 不等式重难点检测卷**

## **注意事项：**

**本试卷满分150分，考试时间120分钟，试题共19题。答卷前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、班级等信息填写在试卷规定的位置**

 **一、单选题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）**

1．（2023·江苏南通·模拟预测）已知，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】利用方程组以及不等式的性质计算求解.

【详解】设，

所以，解得，

所以，

又，

所以，故A，C，D错误.

故选：B.

2．（20-21高二上·江苏连云港·阶段练习）已知函数在时取得最小值，则等于（    ）

A．6 B．8 C．16 D．36

【答案】D

【分析】利用基本不等式“一正，二定，三相等”求解即可

【详解】因为，故，当且仅当，即时取等号，故

故选：D

【点睛】均值不等式：

一正：，二定：为定值，三相等：当且仅当时等号成立

3．（2024·江苏扬州·模拟预测）已知，，且，则的最小值为（    ）

A．4 B． C．6 D．

【答案】D

【分析】利用乘“1”法及基本不等式计算可得.

【详解】因为，，且，

所以，

当且仅当，即，时取等号.

故选：D

4．（23-24高一上·江苏连云港·期末）在中，，且，则的面积的最小值为（    ）

A． B．2 C．4 D．8

【答案】C

【分析】根据题意，结合基本不等式，求得，进而求得的面积的最小值.

【详解】因为，可得，则，

当且仅当时，即时，等号成立，所以，解得，

所以的面积的最小值为.

故选：C.

5．（23-24高二下·江苏常州·阶段练习）已知关于的不等式的解集为，则下列选项不正确的是（    ）

A． B．不等式的解集是

C． D．不等式的解集为

【答案】C

【分析】由题意可知，和3是方程的两根，且，故A正确；再结合韦达定理可得,代入选项和，解不等式即可判断;当时，有，从而判断选项

【详解】由题意可知和3是方程的两根,且 ，

, ,

, , ，即选项正确；

不等式等价于,

，即选项正确；

不等式的解集为 ,

当时，有，即选项错误；

∵不等式等价于，即 ,

或,即选项正确.

故选：C.

6．（2020高三·全国·专题练习）已知两正数、满足，则的最小值为（    ）．

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】转化条件为，换元后由对勾函数的性质即可得解.

【详解】由题意，，

令，则，当且仅当时，等号成立，

又函数在上单调递减，

所以当时，函数取最小值，

所以的最小值为.

故选：D．

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是转化条件为，再结合对勾函数的性质即可得解.

7．（23-24高一上·河南濮阳·阶段练习）已知关于*x*的一元二次不等式的解集为，则不等式的解集为（    ）

A．或 B．或

C． D．

【答案】D

【分析】由题意可得且方程的解为，利用韦达定理将用表示，再根据一元二次不等式的解法即可得解.

【详解】因为关于*x*的一元二次不等式的解集为，

所以且方程的解为，

所以，所以，

则不等式，即为不等式，

则，解得，

所以不等式的解集为.

故选：D.

8．（21-22高一·全国·假期作业）关于*x*的方程有两个实数根，，且，那么*m*的值为（    ）

A． B． C．或1 D．或4

【答案】A

【分析】，利用韦达定理可得答案.

【详解】关于*x*的方程有两个实数根，

，

解得：，

关于*x*的方程有两个实数根，，

，，

，即，

解得：或舍去

故选：A.

**二、多选题（本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.）**

9．（23-24高一上·江苏宿迁·期中）若，则下列命题中为真命题的是（    ）

A．若，则 B．若，则

C．若，则 D．若，则

【答案】BC

【分析】取特值可判断A，D；由不等式的性质可判断B，C.

【详解】对于A，取，但，故A错误；

对于B，若，对不等式两边同时平方则，故B正确；

对于C，若，则，所以，故C正确；

对于D，若，取，则，故D错误.

故选：BC.

10．（23-24高一上·江苏徐州·期中）早在公元前6世纪，毕达哥拉斯学派已经知道算术中项，几何中项以及调和中项，毕达哥拉斯学派哲学家阿契塔在《论音乐》中定义了上述三类中项，其中算术中项，几何中项的定义与今天大致相同.而今我们称为正数，的算术平均数，为正数，的几何平均数，并把这两者结合的不等式叫做基本不等式.下列与基本不等式有关的命题中正确的是（    ）

A．若，则

B．若，且，则最小值为4

C．若，，则

D．若，且，则的最小值为2

【答案】BCD

【分析】利用特例法判断A，利用基本不等式“1”的妙用求最值判断B，利用基本不等式结合不等式性质判断C，设，代入化简变形，利用基本不等式求得最小值判断D.

【详解】对于A，若，满足，则，错误；

对于B，若，且，则，时取等号，正确；

对于C，因为，所以，当且仅当即时等号成立，

所以，当且仅当即时等号成立，

由乘法法则知，当且仅当时等号成立，正确.

对于D，令，则，

所以，

（当且仅当即时取等号），即的最小值是2，正确.

故选：BCD

11．（23-24高一上·江苏南京·期中）已知关于的不等式的解集为或，则下列说法正确的是（    ）

A．

B．不等式的解集为

C．

D．不等式的解集为或

【答案】BC

【分析】

根据一元二次不等式的解集求得的关系式，然后对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】依题意，关于的不等式的解集为或，

所以，A选项错误.

，即，

所以，

所以不等式的解集为，B选项正确.

，C选项正确.

，即，

解得，所以不等式的解集为，D选项错误.

故选：BC

**三、填空题：（本题共3小题，每小题5分，共15分.）**

12．（20-21高二·江苏·单元测试）设*a*，*b*，*c*是互不相等的正数，则在四个不等式：

（1）；

（2）；

（3）；

（4）

其中恒成立的有 （把你认为正确的答案的序号都填上）

【答案】（1）（2）（4）

【解析】根据不等式的性质判断（1）（4），根据的单调性证明，取特殊值判断（3）.

【详解】（1），故（1）恒成立

（2）由于函数在单调递减，在单调递增

当*a*＞1时，*a2*＞*a*＞1，*f*（*a2*）＞*f*（*a*）即，

当0＜*a*＜1，0＜*a2*＜*a*＜1，*f*（*a2*）＞*f*（*a*）即

当*a*＝1，

故（2）恒成立；

（3）若*a*﹣*b*＝﹣1，则该不等式不成立，故（3）不恒成立；

（4）由于．故*C*恒成立．

故答案为 ：（1）（2）（4）

【点睛】本题主要考查了不等式的性质的应用，属于中档题.

13．（21-22高一上·全国·课后作业）设*a*、，，有下列不等式：①；②；③；④．其中恒成立的个数是 个．

【答案】2

【分析】由基本不等式判断，可举反例说明不恒成立．

【详解】*a*、，恒成立，所以，①恒成立；

，所以，②恒成立；

时，，，③④不恒成立．

故答案为：2．

14．（23-24高二下·江苏常州·期末）定义表示中最小的数，已知实数满足，，则的最大值是 .

【答案】

【分析】由题先分析出实数，一负两正，然后利用基本不等式放缩求出最小值的最大值即可.

【详解】因为，，

所以两个数中有一个负数，不妔设，所以，

由已知可得，所以，

所以，所以，

所以，所以，

由，故的最大值是.

故答案为：

**四、解答题（本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明､证明过程或演算步骤.）**

15．（20-21高一·江苏·课后作业）（1）已知*x*≤1，比较3*x3*与3*x2*－*x*＋1的大小．

（2）已知*a，b，c*是两两不等的实数，*p*＝*a2*＋*b2*＋*c2*，*q*＝*ab*＋*bc*＋*ca*，试比较*p*与*q*的大小．

【答案】（1）3*x3*≤3*x2*－*x*＋1；（2）*p*>*q*.

【分析】（1）作差法可得3*x3*－(3*x2*－*x*＋1)＝(3*x2*＋1)(*x*－1)，结合*x*≤1，即得解；

（2）由题意可证明*a2*＋*b2*>2*ab*，*b2*＋*c2*>2*ac， a2*＋*c2*>2*ac*，三个不等式叠加，即得解

【详解】（1） 3*x3*－(3*x2*－*x*＋1)＝(3*x3*－3*x2*)＋(*x*－1)＝3*x2*(*x*－1)＋(*x*－1)＝(3*x2*＋1)(*x*－1)．

因为*x*≤1，所以*x*－1≤0，而3*x2*＋1>0，

所以(3*x2*＋1)(*x*－1)≤0，

即3*x3*≤3*x2*－*x*＋1.

（2） 因为*a， b， c*互不相等，所以*a2*＋*b2*－2*ab*＝(*a*－*b*)2>0，

即*a2*＋*b2*>2*ab*.

同理*b2*＋*c2*>2*ac， a2*＋*c2*>2*ac*.

所以2(*a2*＋*b2*＋*c2*)>2(*ab*＋*bc*＋*ac*)，

即*a2*＋*b2*＋*c2*>*ab*＋*bc*＋*ac*，亦即*p*>*q*.

16．（20-21高一·江苏·课后作业）如图，为梯形，其中，，设*O*为对角线的交点.表示平行于两底且与它们等距离的线段（即梯形的中位线），表示平行于两底且使梯形与梯形相似的线段，表示平行于两底且过点*O*的线段，表示平行于两底且将梯形分为面积相等的两个梯形的线段.



试研究线段，，，与代数式，，，之间的关系，并据此推测它们之间的一个大小关系.你能用基本不等式证明所得到的猜测吗？

【答案】答案见解析

【分析】根据题中所给的梯形模型，结合平行线分线段成比例定理，相似，面积相等等方式，建立得到几个平均数，再利用基本不等式和作差法比较大小即可

【详解】因为是梯形的中位线，

所以；

因为梯形与梯形相似，

所以，

所以；

因为，

所以，

所以，

所以，

所以，

设梯形， 的面积分别为 ，高分别为，

则，，

所以，

所以，

所以；

由图可知，，

即

；

证明：

显然，

，

因为，

所以，

所以，

所以

17．（23-24高一上·江苏苏州·阶段练习）已知关于的不等式的解集为．

(1)求实数，的值；

(2)正实数，满足．

①求的最小值；

②若恒成立，求实数的取值范围．

【答案】(1)，

(2)①；②

【分析】（1）依题意可得和是关于的方程的两个根，利用韦达定理计算可得；

（2）①由（1）可知，利用基本不等式计算可得；②由已知可得，利用乘“1”法及基本不等式求出的最小值，依题意，即可得解.

【详解】（1）由题意可得和是关于的方程的两个根，

由根与系数的关系可得，解得．

（2）①由（1）可得，

又，，所以当且仅当时取等号，

所以或（舍去），

所以的最小值为，当且仅当，时取等号.

②因为，且，所以，

所以，

当且仅当，即、时取等号，

因为恒成立，所以恒成立，

则，即实数的取值范围为.

18．（21-22高一上·江苏南京·期中）通过技术创新，某公司的汽车特种玻璃已进入欧洲市场．年，该种玻璃售价为 欧元/平方米，销售量为万平方米．

(1)据市场调查，售价每提高欧元/平方米，销售量将减少万平方米；要使销售收入不低于万欧元，试问：该种玻璃的售价最多提高到多少欧元/平方米?

(2)为提高年销售量，增加市场份额，公司将在年对该种玻璃实施二次技术创新和营销策略改革：提高价格到欧元/平方米（其中），其中投入 万欧元作为技术创新费用，投入万欧元作为固定宣传费用，投入万欧元作为浮动宣传费用，试问：该种玻璃的销售量（单位：万平方米）至少达到多少时，才可能使年的销售收入不低于年销售收入与年投入之和?并求出此时的售价．

【答案】(1)40

(2)102万平方米，30欧元/平方米

【分析】（1）设该种玻璃的售价提高到欧元/平方米，根据条件建立不等关系，即可解决问题；

（2）根据条件建立不等关系，整理得到，再利用基本不等式即可解决问题.

【详解】（1）设该种玻璃的售价提高到欧元/平方米，

由题知，即，解得，

所以该种玻璃的售价最多提高到40欧元/平方米.

（2）由题意得，整理得，

两边同除以得，

又，当且仅当，即时取等号，

所以，故该种玻璃的销售量（单位：万平方米）至少达到102万平方米时，才可能使 年的销售收入不低于年销售收入与年投入之和，此时的售价为欧元/平方米.

19．（22-23高一上·江苏宿迁·阶段练习）对于二次函数，若存在，使得成立，则称为二次函数的不动点.

(1)求二次函数的不动点；

(2)若二次函数有两个不相等的不动点，且，求的取值范围以及的最小值；

(3)若对任意实数，二次函数恒有不动点，求的取值范围.

【答案】(1)和

(2)；

(3)

【分析】（1）由不动点定义建立方程，求解即可；

（2）由函数有两个不相等的不动点，转化为方程，再由二次方程根的分布解得的范围，再将式子化简变形整理为的形式，韦达定理代入，变形转化为，最后根据基本不等式求最值；

（3）对任意实数，二次函数恒有不动点，转化为方程恒有解，即对任意实数，其判别式大于等于零恒成立，得到关于的不等式，求解即可.

【详解】（1）由题意知：，

即，解得，

所以不动点为和3.

（2）依题意，有两个不相等的正实数根，

即方程有两个不相等的正实数根，

，

则，解得，

所以







，

因为，所以，

所以，

当且仅当，即时等号成立，

所以的最小值为8.

（3）由于函数恒有不动点，

由，

得，

即方程恒有解.

所以，即，

又因为是任意实数，

所以关于的二次方程的判别式，

即，解得，

所以的取值范围是