# 数列综合复习资料

## 一、基础知识

$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

### 1.等差数列的定义与性质

定义：$a_{n+1}-a_n=d$（$d$ 为常数），$a_n=a_1+(n-1)d$

$2n(2n-1)d$

等差中项：$x$，$A$，$y$ 成等差数列 $\Leftrightarrow 2A=x+y$

前 $n$ 项和 $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$(2m-1)a_1+\frac{(2m-1)(2m-2)}{2}d$

性质：$\{a_n\}$ 是等差数列

(1)若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$；

(2)数列 $\{a_{2n-1}\},\{a_{2n}\},\{a_{2n+1}\}$ 仍为等差数列，$S_n$，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ …… 仍为等差数列，公差为 $n^2d$；

$\frac{a_m}{b_m}=\frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$

(3)若三个成等差数列，可设为 $a-d$，$a$，$a+d$

(4)若 $a_n$，$b_n$ 是等差数列，且前 $n$ 项和分别为 $S_n$，$T_n$，则 $\frac{a_m}{b_m}=\frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$

(5)$\{a_n\}$ 为等差数列 $\Leftrightarrow S_n=an^2+bn$（$a$，$b$ 为常数，是关于 $n$ 的常数项为 0 的二次函数）

$S_n$ 的最值可求二次函数 $S_n=an^2+bn$ 的最值；或者求出 $\{a_n\}$ 中的正、负分界项，

即：当 $a_1>0$，$d<0$，解不等式组 $\begin{cases}a_n\ge 0\\ a_{n+1}\le 0\end{cases}$ 可得 $S_n$ 达到最大值时的 $n$ 值.

当 $a_1<0$，$d>0$，由 $\begin{cases}a_n\le 0\\ a_{n+1}\ge 0\end{cases}$ 可得 $S_n$ 达到最小值时的 $n$ 值.

(6)项数为偶数 $2n$ 的等差数列 $\{a_n\}$，有

$S_{2n}=n(a_1+a_{2n})=n(a_2+a_{2n-1})=\cdots=n(a_n+a_{n+1})$（$a_n,a_{n+1}$ 为中间两项）

$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\frac{S_{奇}}{S_{偶}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

$\frac{a_1+a_{2n}}{2}\times 2n$

$=n(a_1+a_{2n})$

(7) 项数为奇数 $2n-1$ 的等差数列 $\{a_n\}$，有

$S_奇$ $n$项 $a_1$ $a_{2n-1}$

$n$项 $2d = d'$

$$S_奇 = \frac{a_1 + a_{2n-1}}{2} \times n = \frac{2a_n}{2} \times n$$

$S_偶$ $n$项 $a_2$ $a_{2n}$

$$S_偶 = \frac{a_2 + a_{2n}}{2} \times n = \frac{2a_{n+1}}{2} \times n$$

$$\frac{S_奇}{S_偶} = \frac{\frac{\cancel{2}a_n}{\cancel{2}} \cancel{\times n}}{\frac{\cancel{2}a_{n+1}}{\cancel{2}} \cancel{\times n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

---

$$T_{2m-1} = \underline{(2m-1)b_1 + (2m-1)(m-1)d_2}$$

$$\frac{a_m}{b_m} = \boxed{\frac{a_1 + (m-1)d_1}{b_1 + (m-1)d_2}}$$

$$\frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}} = \frac{(2m-1)a_1 + (2m-1)(m-1)d_1}{(2m-1)b_1 + (2m-1)(m-1)d_2}$$

$$= \boxed{\frac{a_1+(m-1)d_1}{b_1+(m-1)d_2}}$$

$$= \frac{a_m}{b_m}$$

$$\frac{S_n}{T_n} \qquad \boxed{\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}} \qquad \frac{a_n}{b_n}$$

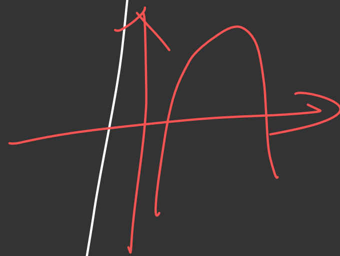
$a_n$ $\quad S_n$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

$$= na_1 + \frac{n^2}{2}d - \frac{n}{2}d$$

$$= \frac{n^2}{2}d + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

$$= \frac{d}{2}\underline{n^2} + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)\underline{n}$$



$$S_{奇} = na_n$$

$2 \cdots\cdots 2n-2$

$$S_{偶} = \frac{a_2 + a_{2n-2}}{2} \times (n-1)$$

$$= \frac{2a_n}{2} \times (n-1)$$

$$= (n-1)a_n$$

$$\frac{S_{奇}}{S_{偶}} = \frac{na_n}{(n-1)a_n} = \boxed{\frac{n}{n-1}}$$

| | 等差数列 | 等比数列 |
|---|---|---|
| 定义 | $a_n-a_{n-1}=$常数$(n\geq2)$ | $\frac{a_n}{a_{n-1}}=$常数$(n\geq2)$ |
| 通项公式 | $a_n=a_1+(n-1)d$ | $a_n=a_1q^{n-1}(q\neq0)$ |
| 判定方法 | (1) 定义法<br>(2) 中项公式法：<br>$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\geq1)\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列<br>(3) 通项公式法：<br>$a_n=pn+q$($pq$ 为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列<br>(4) 前 n 项和公式法：$S_n=An^2+Bn$<br>($A$、$B$ 为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列<br>(5)$\{a_n\}$为等比数列，$a_n>0$<br>$\Leftrightarrow\{\log_a a_n\}$为等差数列 | (1)定义法<br>(2) 中项公式法：$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}(n\geq1)(a_n\neq0)\Leftrightarrow\{a_n\}$为等比数列<br>(3)通项公式法：$a_n=c\cdot q^n$($c$、$q$ 均是不为 0 的常数，$n\in N^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等比数列<br>(4)$\{a_n\}$为等差数列$\Leftrightarrow\{a^{a_n}\}$为等比数列<br>($a>0$ 且 $a\neq1$) |
| 性质 | (1)若 $m$、$n$、$p$、$q\in N^*$，且 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$<br>特别：若 $m+n=2p$，则 $a_m+a_n=2a_p$.<br>(2)$a_n=a_m+(n-m)d$<br>(3) 数列 $S_m$，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…也是等差数列，<br>即 $2(S_{2m}-S_m)=S_m+(S_{3m}-S_{2m})$ | (1)若 $m$、$n$、$p$、$q\in N^*$，且 $m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$<br>特别地，若 $m+n=2p$，则 $a_m\cdot a_n=a_p^2$.<br>(2)$a_n=a_mq^{n-m}$<br>(3) 若等比数列前 n 项和为 $S_n$ 则 $S_m$，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$ 仍成等比数列，即 $(S_{2m}-S_m)^2=S_m(S_{3m}-S_{2m})(m\in N^*$，公比 $q\neq-1)$. |
| 前 n 项和 | $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ | (1)$q\neq1$，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$<br>(2)$q=1$，$S_n=na_1$ |

$S_n=3^n-1$　　$S_{n-1}=3^{n-1}-1$

## 三、考点方法归纳

### 考点一　求数列的通项公式

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-3^{n-1}+1$

**1.由 $a_n$ 与 $S_n$ 的关系求通项公式：** 由 $S_n$ 与 $a_n$ 的递推关系求 $a_n$ 的常用思路有：

①利用 $S_n-S_{n-1}=a_n(n\geq2)$转化为 $a_n$ 的递推关系，再求其通项公式；

$=3^n-3^{n-1}$　　$n>1$

数列的通项 $a_n$ 与前 n 项和 $S_n$ 的关系是 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq2.\end{cases}$ 当 $n=1$ 时，$a_1$ 若适合 $S_n-S_{n-1}$，则 $n=1$ 的情况可并入 $n\geq2$ 时的通项 $a_n$；当 $n=1$ 时，$a_1$ 若不适合 $S_n-S_{n-1}$，则用分段函数的形式表示。

$3\cdot3^{n-1}$

$a_1=3-1=2$　　$n=1$时　$S_1=3^1-1=2$　　$=2\cdot3^{n-1}$

$a_1=2$　　$a_n=3^n-3^{n-1}=(3-1)3^{n-1}$

$S_n = n^2 - n + 1$

$S_{2n} - S_n \qquad S_n$

$a_n$

$n^2 d \qquad d$

$$\begin{cases} a_n = S_n - S_{n-1} & n>1 \\ a_1 = S_1 \end{cases}$$

$n>1$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 - n + 1 - (n-1)^2 + (n-1) - 1$

$= \cancel{n^2} - \cancel{n} \cancel{+1} - \cancel{n^2} + 2n \cancel{-1} + \cancel{n} - 1 - 1$

$= 2n - 2$

$$a_n = \begin{cases} 2n-2 & n>1 \\ 1 & n=1 \end{cases}$$

$n=1 \qquad a_1 = S_1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$a_1' = 2 - 2 = 0$ ✗

②转化为 $S_n$ 的递推关系，先求出 $S_n$ 与 n 的关系，再求 $a_n$

**[例 1]** 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为(1)$S_n=3^n-1$(2) $S_n=n^2-n+1$,分别求它的通项公式 $a_n$.

解(1) 当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)=2\times 3^{n-1}$；当 n=1 时，$a_1=S_1=2$ 也满足 $a_n=2\times 3^{n-1}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2\times 3^{n-1}$.

解(2) ∵$a_1=S_1=1^2-1+1=1$，当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-n+1)-[(n-1)^2-(n-1)+1]=2n-2$.

$$\therefore a_n=\begin{cases}1 & n=1 \quad , \\ 2n-2 & n\geq 2 \quad .\end{cases}$$

**2.由递推关系式求数列的通项公式**

由递推公式求通项公式的常用方法：已知数列的递推关系，求数列的通项公式时，通常用累加、累乘、构造法求解。

(1)当出现 $a_n=a_{n-1}+m$ 时，构造等差数列；当出现 $a_n=xa_{n-1}+y$ 时，构造等比数列；

(2)当出现 $a_n=a_{n-1}+f(n)$时，用累加法求解；

(3)当出现$\frac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$时，用累乘法求解。

**[例 2]** 根据下列条件，确定数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(1)$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$；　(2)$a_1=1$，$a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geq 2)$；　(3)$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+3n+2$.

解(1) ∵$a_{n+1}=3a_n+2$，∴$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，即$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$.∴数列 $\{a_n+1\}$ 为等比数列，公比 $q=3$.

又 $a_1+1=2$，∴$a_n+1=2\times 3^{n-1}$.∴$a_n=2\times 3^{n-1}-1$.

解(2) ∵$a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}(n\geq 2)$,∴$a_{n-1}=\frac{n-2}{n-1}a_{n-2},\ldots,a_2=\frac{1}{2}a_1$. 以上(n−1)个式子相乘,$a_n=a_1\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}=\frac{a_1}{n}=\frac{1}{n}$.

解(3) ∵$a_{n+1}-a_n=3n+2$，∴$a_n-a_{n-1}=3n-1(n\geq 2)$,

$$\therefore a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_2-a_1)+a_1=\frac{n\quad 3n+1}{2}(n\geq 2).$$

当 n=1 时，$a_1=\frac{1}{2}\times(3\times 1+1)=2$ 符合公式，∴$a_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}$.