 圆锥曲线专题练习

**题型一：数形结合确定直线和圆锥曲线的位置关系**

例题1、已知直线L:y=kx+1和椭圆C：$\frac{x^{2}}{4}$ + $\frac{y^{2}}{m}$ =1始终有交点，求m的取值范围

解：根据直线L:y=kx+1与椭圆C：$\frac{x^{2}}{4}$ + $\frac{y^{2}}{m}$ =1过动点（0，$\pm \sqrt{m}$）,且m$\ne $4，如果直线L:y=kx+1和椭圆C：$\frac{x^{2}}{4}$ + $\frac{y^{2}}{m}$ =1始终有交点，则$\sqrt{m}\geq $1，且m$\ne $4，即1$\leq $m且m$\ne $4。

**题型二：弦的垂直平分线问题**

例题2、过点T(-1,0)作直线L与直线N：$y^{2}=x$交于A,B两点。在x轴上是否存在一点E($x\_{0}$,0),使得$∆$ABE是等边三角形，若存在，求出x₀：若不存在，请说明理由。

解：依题意知，直线的斜率存在，且不等于0。

设直线 l:y=k(x+1), k≠0, A(x₁,y₁), B(x₂,y₂)。

由 $\left\{\begin{array}{c}y=k\left(x+1\right)\\y^{2}=x\end{array}\right.$消y整理，得k²x²+(2k²-1)x+k²=0 ①

由直线和抛物线交于两点，得Δ=(2k²-1)²-4k⁴=-4k²+1>0

即 $0<k^{2}<\frac{1}{4}$②

由韦达定理，得： $x\_{1}+x\_{2}=−\frac{2k^{2}−1}{k^{2}},x\_{1}x\_{2}=1。$则线段AB的中点为 $\left(\frac{1}{2k}\right)。$

线段的垂直平分线方程为：

 $y−\frac{1}{2k}=−\frac{1}{k}\left(x−\frac{1−2k^{2}}{2k^{2}}\right)$y=0,得 $x\_{0}=\frac{1}{2k^{2}}−\frac{1}{2},$则 $E\left(0\right)$

∵△ABE为正三角形, $∴E\left(0\right)$到直线AB的距离d为 $\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|。$

 $∵|AB|=\sqrt{\left(x\_{1}−x\_{2}\right)^{2}+\left(y\_{1}−y\_{2}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{1−4k^{2}}}{k^{2}}\sqrt{1+k^{2}}d=\frac{\sqrt{1+k^{2}}}{2|k|}$

 $∴\frac{\sqrt{3}\sqrt{1−4k^{2}}}{2k^{2}}\sqrt{1+k^{2}}=\frac{\sqrt{1+k^{2}}}{2|k|}$

解得 $k=\pm \frac{\sqrt{39}}{13}$（满足②式）

此时 $x\_{0}=\frac{5}{3},$

**题型三：动弦过定点问题**

**例题3、已知椭圆** $C:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\left(a\right⟩b>0)$**的离心率为** $\frac{\sqrt{3}}{2},$**且在 x轴上的顶点分别为 A₁(-2,0),A₂(2,0)。**

**(I) 求椭圆的方程**

**(Ⅱ)若直线l:x=t(t>2)与x轴交于点 T,点P为直线l上异于点T的任一点，直线 PA₁，PA₂分别与椭圆交于M、N点，试问直线 MN是否通过椭圆的焦点? 并证明你的结论**



**解：(I) 由已知椭圆C 的离心率** $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},a=2$**则得** $c=\sqrt{3},b=1.$

**从而椭圆的方程为** $\frac{x^{2}}{4}+y^{2}=1$

 **(Ⅱ) 设M(x₁,y₁),N(x₂,y₂),直线 A₁M的斜率为k₁,则直线 A₁M的方程为**

**y=k₁(x+2),**

**由**$\left\{\begin{array}{c}y=k\_{1}\left(x+2\right)\\x^{2}+4y^{2}=4\end{array}\right.$**消y 整理得** $\left(1+4k\_{1}^{2}\right)x^{2}+16k\_{2}x+16k\_{1}^{2}−4=0$

**解得：**$−2$**和x₁ 是方程的两个根.**

$∴−2x\_{1}=\frac{16k\_{1}^{2}−4}{1+4k\_{1}^{2}}$**则** $x\_{1}=\frac{2−8k\_{1}^{2}}{1+4k\_{1}^{2}},$$y\_{1}=\frac{4k\_{1}}{1+4k\_{1}^{2}},$**即点M的坐标为** $\left(\frac{4k\_{1}}{1+4k\_{1}^{2}}\right),$

**同理，设直线 A₂N的斜率为k₂，则得点N的坐标为** $\left(\frac{−4k\_{2}}{1+4k\_{2}^{2}}\right)$

$∵y\_{p}=k\_{1}\left(t+2\right),y\_{p}=k\_{2}\left(t−2\right)∴\frac{k\_{1}−k\_{2}}{k\_{1}+k\_{2}}=−\frac{2}{t},$

**∵直线 MN的方程为：** $\frac{y−y\_{1}}{x−x\_{1}}=\frac{y\_{2}−y\_{1}}{x\_{2}−x\_{1}},$

**∴令 y=0, 得** $x=\frac{x\_{2}y\_{1}−x\_{1}y\_{2}}{y\_{1}−y\_{2}} ,,$**将点 M、N的坐标代入，化简后得：** $x=\frac{4}{t}$

**又** $∵t>2,∴0<\frac{4}{t}<2∵$**椭圆的焦点为** $\left(0\right)$

$∴\frac{4}{t}=\sqrt{3},$**即** $t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**故当** $t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$**时，MN过椭圆的焦点.**

**题型四：过已知曲线上定点的弦的问题**

**例题4、 已知点A、B、C 是椭圆 E** $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\left(a\right⟩b>0)$**上的三点，其中点** $A\left(0\right)$**是椭圆 的右顶点，直线 BC 过椭圆的中心O，且** $\vec{AC}⋅\vec{BC}=0,|\vec{BC}|=2|\vec{AC}|,$**如图。(1)求点C的坐标及椭圆 E的方程； (Ⅱ)若椭圆 E上存在两点**

**P、Q，使得直线PC与直线 QC关于直线** $x=\sqrt{3}$**对称，求直线PQ的斜率。**



解: $\left(1\right)∵|\vec{BC}|=2|\vec{AC}|,$且BC过椭圆的中心O

 $∵A\left(0\right)$是椭圆的右顶点， $∴a=2\sqrt{3},$则椭圆方程为： $\frac{x^{2}}{12}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$将点 $C\left(\sqrt{3}\right)$代入方程，得b²=4, ∴椭圆 E 的方程为 $\frac{x^{2}}{12}+\frac{y^{2}}{4}=1$

 $∴|\vec{OC}|=|\vec{AC}|⋅∴\vec{AC}\vec{BC}=0∴∠ACO=\frac{π}{2}$又∵ $A\left(0\right).$点C的坐标为 $\left(\sqrt{3}\right),$

**(Ⅱ)∵ 直线 PC与直线QC 关于直线** $x=\sqrt{3}$**对称，**

**∴设直线 PC的斜率为k，则直线QC 的斜率为-k，从而直线 PC的方程为：** $y−\sqrt{3}=k\left(x−\sqrt{3}\right),$**即** $y=kx+\sqrt{3}\left(1−k\right),$**由** $\left\{\begin{array}{c}y=kx+\sqrt{3}\left(1−k\right)\\x^{2}+3y^{2}−12=0\end{array}\right.$**消y， 整理得：**

$\left(1+3k^{2}\right)x^{2}+6\sqrt{3}k\left(1−k\right)x+9k^{2}−18k−3=0∵x=\sqrt{3}$**是方程的一个根，**

$∴x\_{p}\sqrt{3}=\frac{9k^{2}−18k−3}{1+3k^{2}}$**即** $x\_{P}=\frac{9k^{2}−18k−3}{\sqrt{3}\left(1+3k^{2}\right)}$**同理可得：** $x\_{Q}=\frac{9k^{2}+18k−3}{\sqrt{3}\left(1+3k^{2}\right)}$

$∵y\_{p}−y\_{Q}=kx\_{p}+\sqrt{3}\left(1−k\right)+kx\_{Q}−\sqrt{3}\left(1+k\right)=k\left(x\_{p}+x\_{Q}\right)−2\sqrt{3}k=\frac{−12k}{\sqrt{3}\left(1+3k^{2}\right)}$

$x\_{p}−x\_{Q}=\frac{9k^{2}−18k−3}{\sqrt{3}\left(1+3k^{2}\right)}−\frac{9k^{2}+18k−3}{\sqrt{3}\left(1+3k^{2}\right)}=\frac{−36k}{\sqrt{3}\left(1+3k^{2}\right)} :,k\_{pq}=\frac{y\_{p}−y\_{Q}}{x\_{p}−x\_{Q}}=\frac{1}{3}$

**则直线PQ的斜率为定值**

**题型五：共线向量问题**

**例题5、设过点 D(0，3)的直线交曲线** $M:\frac{x^{2}}{9}+\frac{y^{2}}{4}=1$**于P、Q两点,且** $\vec{DP}=l\vec{DQ},$**求实数/ 的取值范围。**

**解:设**$P\left(y₁\right),Q\left(y₂\right),Q=lDQ∧\left(y₁−3\right)=l\left(y₂−3\right)$

**即** $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=lx\_{2}\\y\_{1}=3+l\left(y\_{2}−3\right)\end{array}\right.$

**判别式法、韦达定理法、配凑法**

**设直线PQ的方程为：y=kx+3,k≠0, 由** $\left\{\begin{array}{c}y=kx+3\\4x^{2}+9y^{2}=36\end{array}\right.$**消y整理后，得**

$\left(4+9k^{2}\right)x^{2}+54kx+45=0 P、$**Q是曲线M上的两点**

**∴△=(54k)²-4×45(4+9k²)=144k²-80≥0**

 **即 9k²≥5 ①**

**由韦达定理得：** $x\_{1}+x\_{2}=−\frac{54k}{4+9k^{2}},x\_{1}x\_{2}=\frac{45}{4+9k^{2}} : :; : :\frac{\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}}{x\_{1}x\_{2}}=\frac{x\_{1}}{x\_{2}}+\frac{x\_{2}}{x\_{1}}+2$

$∴\frac{54^{2}k^{2}}{45\left(4+9k^{2}\right)}=\frac{\left(1+λ\right)^{2}}{λ}$**即** $\frac{36λ}{5\left(1+λ\right)^{2}}=\frac{9k^{2}+4}{9k^{2}}=1+\frac{4}{9k^{2}}$**②**

**由①得** $0<\frac{1}{9k^{2}}\leq \frac{1}{5},$**代入②，整理得** $1<\frac{36λ}{5\left(1+λ\right)^{2}}\leq \frac{9}{5},$**解之得** $\frac{1}{5}<λ<5$

**当直线 PQ的斜率不存在，即x=0时，易知λ=5或** $λ=\frac{1}{5},$

**总之实数的取值范围是** $\left[5\right],$

**题型六：面积问题**

**(1)求椭圆C的方程；**

**(Ⅱ) 设直线 l与椭圆 C交于 A、B两点，坐标原点O到直线l的距离为** $\frac{\sqrt{3}}{2},$**求△AOB面积的最大值。**

**解：(Ⅰ)设椭圆的半焦距为c，依题意** $\left\{\begin{array}{c}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}\\a=\sqrt{3},\end{array}\right.,∴b=1$

**∴所求椭圆方程为** $\frac{x^{2}}{3}+y^{2}=1.$

 **(Ⅱ)设A(x₁ ,y₁), B(x₂, y₂)。(1)当AB⊥x轴时,** $\left|AB\right|=\sqrt{3}.$**(2)当AB与x轴不垂直时,设直线AB 的方程为 y=kx+m, 由已知** $\frac{\left|m\right|}{\sqrt{1+k^{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$**得** $m^{2}=\frac{3}{4}\left(k^{2}+1\right),$

**把y=kx+m代入椭圆方程，整理得 (3k²+1)x²+6kmx+3m²-3=0.**

$∴x\_{1}+x\_{2}=\frac{−6km}{3k^{2}+1},x\_{1}x\_{2}=\frac{3\left(m^{2}−1\right)}{3k^{2}+1},∴|AB|^{2}=\left(1+k^{2}\right)\left(x\_{2}−x\_{1}\right)^{2}=\left(1+k^{2}\right)\left[\frac{36k^{2}m^{2}}{\left(3k^{2}+1\right)^{2}}−\frac{12\left(m^{2}−1\right)}{3k^{2}+1}\right]$

$=\frac{12\left(k^{2}+1\right)\left(3k^{2}+1−m^{2}\right)}{\left(3k^{2}+1\right)^{2}}=\frac{3\left(k^{2}+1\right)\left(9k^{2}+1\right)}{\left(3k^{2}+1\right)^{2}}=3+\frac{12k^{2}}{9k^{4}+6k^{2}+1}=3+\frac{12}{9k^{2}+\frac{1}{k^{2}}+6}\left(k\ne 0\right)\leq 3+\frac{12}{2×3+6}=4$

**当且仅当** $9k^{2}=\frac{1}{k^{2}},$**即** $k=\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$**时等号成立。当k=0时，** $|AB|=\sqrt{3},$

**综上所述** $|AB|ₘₐₓ=2.$

**∴当|AB|最大时,△AOB面积取最大值** $S=\frac{1}{2}×|AB|\_{max}×\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

**题型七：弦或弦长为定值问题**

**例题7、在平面直角坐标系xOy中，过定点C(0，p)作直线与抛物线 x²=2py(p>0) 相交于 A、B两点。**

**(Ⅰ)若点N是点C关于坐标原点O的对称点，求△ANB面积的最小值；(Ⅱ)是否存在垂直于y轴的直线 l，使得1被以 AC为直径的圆截得弦长恒为定值? 若存在， 求出1的方程： 若不存在， 说明理由。**

**** $\left\{\begin{array}{c}x^{2}=2py\\y=kx+p.\end{array}\right.$**消去 y得 x²-2pkx-2p²=0.**

**由韦达定理得 x₁+x₂=2pk,x₁x₂=-2p².**

**于是**$S\_{ABN}=S\_{BCN}+S\_{ACN}=\frac{1}{2}⋅2p|x\_{1}−x\_{2}|=p|x\_{1}−x\_{2}|=p\sqrt{\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}−4x\_{1}x\_{2}}=p\sqrt{4p^{2}k^{2}+8p^{2}}=2p^{2}\sqrt{k^{2}+2}.$

**∴当k=0时,** $\left(S\_{ABN}\right)min=2\sqrt{2}p\_{2}.$

**(Ⅱ) 假设满足条件的直线 1存在，其方程为 y=a，AC 的中点为O'，t与AC为直径的圆相交于点P、Q，PQ的中点为 H, 则O'H⊥PQ,O'点的坐标为** $\left(\frac{y\_{1}+p}{2}\right)$

$$∵|O^{'}P|=\frac{1}{2}|AC|=\frac{1}{2}\sqrt{x\_{1}^{2}+\left(y\_{1}−p\right)^{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{y\_{1}^{2}+p^{2}}.$$

$|O^{'}H|=|a−\frac{y\_{1}+p\_{2}}{2}|=\frac{1}{2}|2a−y\_{1}−p\_{1}⋅|PH|^{2}=|O^{'}P|^{2}−|O^{'}H|^{2}=\frac{1}{4}\left(y\_{1}^{2}+p^{2}\right)−\frac{1}{4}\left(2a−y\_{1}−p\right)^{2}=\left(a−\frac{p}{2}\right)y\_{1}+a\left(p−a\right),$



 $∴|PQ|^{2}=\left(2|PH|\right)^{2}=4\left[\left(a−\frac{p}{2}\right)y\_{2}+a\left(p−a\right)\right]$

 令 $a−\frac{p}{2}=0,$得 $a=\frac{p}{2},$此时|PQ|= p为定值，故满足条件的直线1存在，其方程为 $y=\frac{p}{2},$即抛物线通径所在直线

**解法2:**

**(Ⅰ)前同解法1，再由弦长公式得**

$|AB|=\sqrt{1+k^{2}}|x\_{1}−x\_{2}|=\sqrt{1+k^{2}}⋅\sqrt{\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}−4x\_{1}x\_{2}}=\sqrt{1+k^{2}}⋅\sqrt{4p^{2}k^{2}+8p^{2}}$

$=2p\sqrt{1+k^{2}}⋅\sqrt{k^{2}+2}.$

**又由点到直线的距离公式得** $d=\frac{2p}{\sqrt{1+k^{2}}}.$

**从而，** $S\_{ABV}=\frac{1}{2}⋅d⋅|AB|=\frac{1}{2}⋅2p\sqrt{1+k^{2}}⋅\sqrt{k^{2}+2}⋅\frac{2p}{\sqrt{1+k^{2}}}=2p^{2}\sqrt{k^{2}+2},$

**∴当k=0时,** $\left(S\_{ABN}\right)max=2\sqrt{2}p^{2}.$

**(Ⅱ) 假设满足条件的直线 t存在，其方程为 y=a，则以AC为直径的圆的方程为(x-0)(x-x₁)-(y-p)(y-y₁)=0,将直线方程 y=a 代入得x²-x₁x-(a-p)(a-y₁)=0,**

**则** $Δ=x\_{1}^{2}−4\left(a−p\right)\left(a−y\_{1}\right)=4\left[\left(a−\frac{p}{2}\right)\right]y1+a\left(p−a\right).$

**设直线 l与以AC为直径的圆的交点为 P (x₂,y₂),Q(x₄,y₄),则有**

$|PQ|=|x\_{3}−x\_{4}|=\sqrt{4\left[\left(a−\frac{p}{2}\right)y\_{1}+a\left(p−a\right)\right]}=2\sqrt{\left(a−\frac{p}{2}\right)y\_{1}+a\left(p−a\right)}.$

**令** $a−\frac{p}{2}=0,$**得** $a=\frac{p}{2},$**此时|PQ|=p为定值，故满足条件的直线1存在，其方程为** $y=\frac{p}{2}.$

**即抛物线的通径所在的直线。**

**题型八：角度问题**

**例题8、(如图(21)图, M(-2,0)和N(2,0) 是平面上的两点,动点 P满足: |PM|+|PN|=6.**

**(Ⅰ)求点P的轨迹方程；**

**(Ⅱ)若** $|PM|⋅|PN|=\frac{2}{1−cos∠MPN},$**求点 P的坐标.**



解：(Ⅰ)由椭圆的定义，点 P的轨迹是以M、 N为焦点，长轴长2a=6的椭圆.

因此半焦距 c=2，长半轴 a=3，从而短半轴

 $b=\sqrt{a^{2}−c^{2}}=\sqrt{5}$所以椭圆的方程为 $\frac{x^{2}}{9}+\frac{y^{2}}{5}=1.$

(Ⅱ)由 $|PM||PN|=\frac{2}{1−cosMPN},$得|PM||PN|cosMPN=|PM||PN|-2. ①

**因为cosMPN ≠1,P不为椭圆长轴顶点,故P,M,N构成三角形,在△PMV中,|MN|=4,由余弦定理有**

**|MN|²=|PM|²+|PN|²-2|PM||PN|cosMPN. ②**

**将①代入②，得4²=|PM|²+|PN|²-2(|PM||PN|-2).**

**故点 P在以 M、N为焦点，实轴长为** $2\sqrt{3}$**的双曲线** $\frac{x^{2}}{3}−y^{2}=1$**上.**

**由(Ⅰ)知，点 P的坐标又满足** $\frac{x^{2}}{9}+\frac{y^{2}}{5}=1,$**所以**

由方程组

 $\left\{\begin{array}{c}5x^{2}+9y^{2}=45,\\x^{2}+3y^{2}=3.\end{array}\right.$

解得

 $\left\{\begin{array}{c}x=\pm \frac{3\sqrt{3}}{2},\\y=\pm \frac{\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$

**即P点坐标为** $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)、\left(−\frac{\sqrt{5}}{2}\right)、\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$**或** $\left(−\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$