 圆锥曲线专题练习

**题型一：数形结合确定直线和圆锥曲线的位置关系**

例题1、已知直线L:y=kx+1和椭圆C： + =1始终有交点，求m的取值范围

解：根据直线L:y=kx+1与椭圆C： + =1过动点（0，）,且m4，如果直线L:y=kx+1和椭圆C： + =1始终有交点，则1，且m4，即1m且m4。

**题型二：弦的垂直平分线问题**

例题2、过点T(-1,0)作直线L与直线N：交于A,B两点。在x轴上是否存在一点E(,0),使得ABE是等边三角形，若存在，求出x₀：若不存在，请说明理由。

解：依题意知，直线的斜率存在，且不等于0。

设直线 l:y=k(x+1), k≠0, A(x₁,y₁), B(x₂,y₂)。

由 消y整理，得k²x²+(2k²-1)x+k²=0 ①

由直线和抛物线交于两点，得Δ=(2k²-1)²-4k⁴=-4k²+1>0

即 ②

由韦达定理，得： 则线段AB的中点为

线段的垂直平分线方程为：

y=0,得 则

∵△ABE为正三角形, 到直线AB的距离d为

解得 （满足②式）

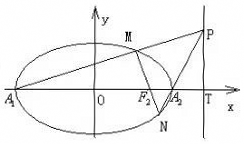
此时

**题型三：动弦过定点问题**

**例题3、已知椭圆 的离心率为 且在 x轴上的顶点分别为 A₁(-2,0),A₂(2,0)。**

**(I) 求椭圆的方程**

**(Ⅱ)若直线l:x=t(t>2)与x轴交于点 T,点P为直线l上异于点T的任一点，直线 PA₁，PA₂分别与椭圆交于M、N点，试问直线 MN是否通过椭圆的焦点? 并证明你的结论**



**解：(I) 由已知椭圆C 的离心率 则得**

**从而椭圆的方程为**

**(Ⅱ) 设M(x₁,y₁),N(x₂,y₂),直线 A₁M的斜率为k₁,则直线 A₁M的方程为**

**y=k₁(x+2),**

**由消y 整理得**

**解得：和x₁ 是方程的两个根.**

**则 即点M的坐标为**

**同理，设直线 A₂N的斜率为k₂，则得点N的坐标为**

**∵直线 MN的方程为：**

**∴令 y=0, 得 将点 M、N的坐标代入，化简后得：**

**又 椭圆的焦点为**

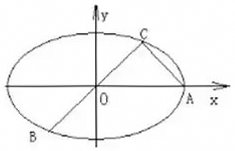
**即**

**故当 时，MN过椭圆的焦点.**

**题型四：过已知曲线上定点的弦的问题**

**例题4、 已知点A、B、C 是椭圆 E 上的三点，其中点 是椭圆 的右顶点，直线 BC 过椭圆的中心O，且 如图。(1)求点C的坐标及椭圆 E的方程； (Ⅱ)若椭圆 E上存在两点**

**P、Q，使得直线PC与直线 QC关于直线 对称，求直线PQ的斜率。**



解: 且BC过椭圆的中心O

是椭圆的右顶点， 则椭圆方程为： 将点 代入方程，得b²=4, ∴椭圆 E 的方程为

又∵ 点C的坐标为

**(Ⅱ)∵ 直线 PC与直线QC 关于直线 对称，**

**∴设直线 PC的斜率为k，则直线QC 的斜率为-k，从而直线 PC的方程为： 即 由 消y， 整理得：**

**是方程的一个根，**

**即 同理可得：**

**则直线PQ的斜率为定值**

**题型五：共线向量问题**

**例题5、设过点 D(0，3)的直线交曲线 于P、Q两点,且 求实数/ 的取值范围。**

**解:设**

**即**

**判别式法、韦达定理法、配凑法**

**设直线PQ的方程为：y=kx+3,k≠0, 由 消y整理后，得**

**Q是曲线M上的两点**

**∴△=(54k)²-4×45(4+9k²)=144k²-80≥0**

**即 9k²≥5 ①**

**由韦达定理得：**

**即 ②**

**由①得 代入②，整理得 解之得**

**当直线 PQ的斜率不存在，即x=0时，易知λ=5或**

**总之实数的取值范围是**

**题型六：面积问题**

**(1)求椭圆C的方程；**

**(Ⅱ) 设直线 l与椭圆 C交于 A、B两点，坐标原点O到直线l的距离为 求△AOB面积的最大值。**

**解：(Ⅰ)设椭圆的半焦距为c，依题意**

**∴所求椭圆方程为**

**(Ⅱ)设A(x₁ ,y₁), B(x₂, y₂)。(1)当AB⊥x轴时, (2)当AB与x轴不垂直时,设直线AB 的方程为 y=kx+m, 由已知 得**

**把y=kx+m代入椭圆方程，整理得 (3k²+1)x²+6kmx+3m²-3=0.**

**当且仅当 即 时等号成立。当k=0时，**

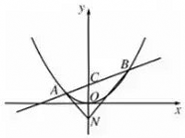
**综上所述**

**∴当|AB|最大时,△AOB面积取最大值**

**题型七：弦或弦长为定值问题**

**例题7、在平面直角坐标系xOy中，过定点C(0，p)作直线与抛物线 x²=2py(p>0) 相交于 A、B两点。**

**(Ⅰ)若点N是点C关于坐标原点O的对称点，求△ANB面积的最小值；(Ⅱ)是否存在垂直于y轴的直线 l，使得1被以 AC为直径的圆截得弦长恒为定值? 若存在， 求出1的方程： 若不存在， 说明理由。**

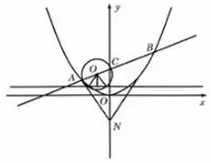
** 消去 y得 x²-2pkx-2p²=0.**

**由韦达定理得 x₁+x₂=2pk,x₁x₂=-2p².**

**于是**

**∴当k=0时,**

**(Ⅱ) 假设满足条件的直线 1存在，其方程为 y=a，AC 的中点为O'，t与AC为直径的圆相交于点P、Q，PQ的中点为 H, 则O'H⊥PQ,O'点的坐标为**



令 得 此时|PQ|= p为定值，故满足条件的直线1存在，其方程为 即抛物线通径所在直线

**解法2:**

**(Ⅰ)前同解法1，再由弦长公式得**

**又由点到直线的距离公式得**

**从而，**

**∴当k=0时,**

**(Ⅱ) 假设满足条件的直线 t存在，其方程为 y=a，则以AC为直径的圆的方程为(x-0)(x-x₁)-(y-p)(y-y₁)=0,将直线方程 y=a 代入得x²-x₁x-(a-p)(a-y₁)=0,**

**则**

**设直线 l与以AC为直径的圆的交点为 P (x₂,y₂),Q(x₄,y₄),则有**

**令 得 此时|PQ|=p为定值，故满足条件的直线1存在，其方程为**

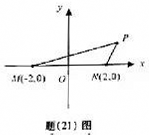
**即抛物线的通径所在的直线。**

**题型八：角度问题**

**例题8、(如图(21)图, M(-2,0)和N(2,0) 是平面上的两点,动点 P满足: |PM|+|PN|=6.**

**(Ⅰ)求点P的轨迹方程；**

**(Ⅱ)若 求点 P的坐标.**



解：(Ⅰ)由椭圆的定义，点 P的轨迹是以M、 N为焦点，长轴长2a=6的椭圆.

因此半焦距 c=2，长半轴 a=3，从而短半轴

所以椭圆的方程为

(Ⅱ)由 得|PM||PN|cosMPN=|PM||PN|-2. ①

**因为cosMPN ≠1,P不为椭圆长轴顶点,故P,M,N构成三角形,在△PMV中,|MN|=4,由余弦定理有**

**|MN|²=|PM|²+|PN|²-2|PM||PN|cosMPN. ②**

**将①代入②，得4²=|PM|²+|PN|²-2(|PM||PN|-2).**

**故点 P在以 M、N为焦点，实轴长为 的双曲线 上.**

**由(Ⅰ)知，点 P的坐标又满足 所以**

由方程组

解得

**即P点坐标为 或**