**2025年上海高考数学满分冲刺热点题型专项训练（九）**

## **导 数**

## **截图20250512223406【热题归纳】**

## **题型1：导数的概念与几何意义**

1．（2024·上海静安·一模）已知物体的位移（单位：）与时间（单位：）满足函数关系，则该物体在时刻的瞬时速度为 .

【答案】2

【分析】由瞬时速度的意义，求出函数在时的导数值即可.

【详解】函数，求导得，则，

所以所求瞬时速度为2.

故答案为：2

2．（2023·上海闵行·二模） ．

【答案】/

【分析】利用导数的定义及求导公式可得答案.

【详解】设函数，则；

.

故答案为：.

3．（2025·上海金山·二模）若直线是曲线在处的切线，则的斜率为 .

【答案】/

【分析】求出函数的导数，再利用导数的几何意义求出斜率.

【详解】函数，求导得，则，

所以的斜率为.

故答案为：

4．（2024·上海·三模）设曲线和曲线在它们的公共点处有相同的切线，则的值为 .

【答案】2

【分析】根据两曲线在有公切线，则是公共点，该点处的导数值相同，列出方程求出的值，则答案可求.

【详解】由已知得，解得，

又，

所以得，

所以，

所以.

故答案为：2

## **题型2：利用导数研究函数的单调性**

5．（2024·上海嘉定·一模）已知，则的解集为 .

【答案】

【分析】根据分段函数的性质，分情况整理不等式，当时，整理不等式，构造函数，利用导数研究新函数的单调性，当时，利用中间值法，可得答案.

【详解】当时，可得，整理可得，

令，令，求导可得，

所以函数在单调递减，令，解得，则，

此时不等式的解集为；

当时，可得，由，则，

易知，此时不等式的解集为.

综上所述，不等式的解集为.

故答案为：.

## **题型3：利用导数研究函数的极值、最值**

6．（2025·上海崇明·二模）已知，若函数有两个极值点，则实数*a*的取值范围是 ．

【答案】

【分析】分析分段函数的单调性，由题意得到对应结论，然后建立不等式组，求得实数*a*的取值范围.

【详解】∵二次函数开口向下，是极大值，

一次函数，当时，函数时单调函数，没有极值点，

要想函数有两个极值点，则这两个极值点为和，

又∵函数在上单调递减，∴在上递增.

∴，∴.

故答案为：

7．（2024·上海徐汇·一模）设，若函数存在两个不同的极值点，则的取值范围为 .

【答案】

【分析】函数存在两个不同的极值点等价于在内有两个异号零点，进而转化为在内有两个不等根即可求解.

【详解】解：易知函数的定义域为，

，

因为函数存在两个不同的极值点，

所以在内有两个不等根，

设，，

则只需，即，

所以，则的取值范围为.

故答案为：

8．（2024·上海·三模）若函数在上存在最小值，则实数*a*的取值范围是 ．

【答案】

【分析】根据题意，函数的极小值点在内，再结合即可求出实数的取值范围.

【详解】因为，所以，

令得，，

当时，，单调递减，

当时，，单调递增，

当时，，单调递减，

所以当时，有极小值，

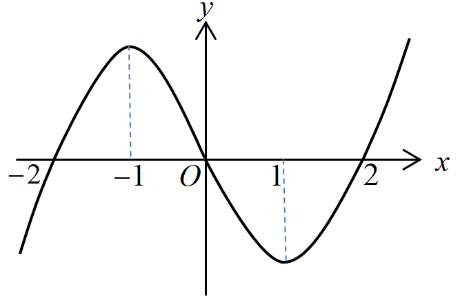
因为函数在上存在最小值，

又，

所以，解得，

所以实数*a*的取值范围是.

故答案为：.

9.（2025·上海静安·二模）设是一个三次函数，为其导函数．如图所示的是函数的图像的一部分，则的极大值与极小值分别为　　

A．与 B．与

C．与 D．与

【解析】当时，，，严格增；

当时，，，严格减；

当时，，，严格减；

当时，，，严格增；

且，故的极大值与极小值分别为与，

故选．

10．（2025·上海松江·二模）定义在上的函数满足，当时，，有以下两个命题：

①当为正整数时，；

②若函数在区间内有3个极大值点，则的取值范围是.

则以下选项正确的是（   ）

A．①是真命题，②是假命题 B．两个都是真命题

C．①是假命题，②是真命题 D．两个都是假命题

【答案】A

【分析】对①，根据题意，可得，利用累加法求求答案；对②，分别求出，，的解析式，利用导数判断极大值情况，得解.

【详解】对于①，当为正整数时，已知，

则，，

将这些式子累加可得，

由等差数列求和公式，

所以，故①正确，

对于②，当时，，令，

，

即，

同理，可得，

，

由，，则，

令，得，令，得，

所以在上单调递增，在上单调递减，

所以是极大值点，

当时，则，

同上易得是极大值点，

当时，则，

可得为极大值点，

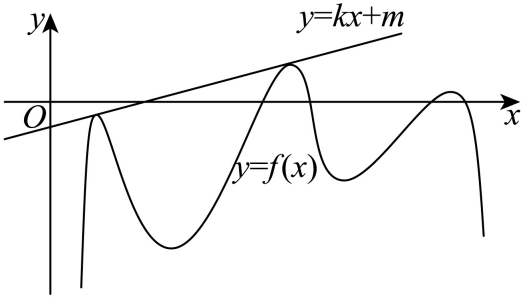
当时，则，

易得为极大值点，

因为函数在区间内有3个极大值点，所以，故②错误.

故选：A.

11．（2024·上海青浦·二模）如图，已知直线与函数的图象相切于两点，则函数有（    ）．



A．2个极大值点，1个极小值点 B．3个极大值点，2个极小值点

C．2个极大值点，无极小值点 D．3个极大值点，无极小值点

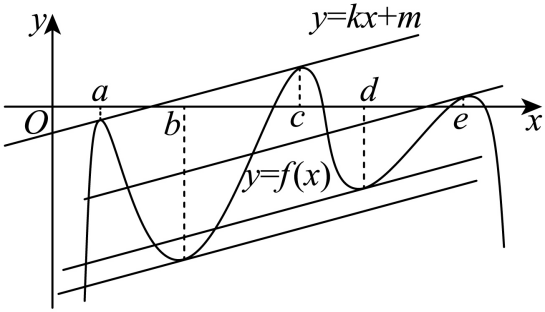
【答案】B

【分析】作出与直线平行的函数的所有的切线，即可观察得到与的大小关系的不同区间，进而得出的正负区间，得出的单调性，进而得到的极值情况，从而判定各个选项的正确与否.

【详解】，

作出与直线平行的函数的所有切线，各切线与函数的切点的横坐标依次为，

在处的导数都等于，



在上，,单调递增，

在上，单调递减，

因此函数有三个极大值点，有两个极小值点.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：解决问题的关键所在是作出与直线平行的函数的所有的切线，由此观察图象即可顺利得解.

12．（2024·上海·三模）已知函数在上无极值，则的取值范围是 .

【答案】

【分析】求导数确定单调性，讨论*x*的取值范围可得结果.

【详解】由题意得，，故，

因为函数在上无极值，

所以在R上恒成立，

当时，，

设，则，

当时，得，当时，得，

则在上单调递减，在上单调递增，

从而，故，

当时，，则.

综上，.

故答案为：

## **题型4：利用导数研究函数的恒成立、能成立**

13．（2025·天津市·一测）已知，若对任意两个不等的正实数，，都有恒成立，则*a*的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】根据条件可变形为，构造函数，利用其为增函数即可求解.根据可知，

令

由知为增函数，

所以恒成立，

分离参数得，

而当时，在时有最大值为，

故.

故选：D

14．（2024·上海虹口·二模）已知关于的不等式对任意均成立，则实数的取值范围为 .

【答案】

【分析】根据题意，分且和且，两种情况讨论，构造函数，利用导数和基本不等式，求得函数的最值，即可求解.

【详解】因为关于的不等式对任意均成立，

①当对任意均成立时，可得对任意均成立，

令，可得，

当时，，单调递增；

当时，，单调递减，

所以，所以，

又由对任意均成立，

可得对任意均成立，

因为，当且仅当时，即时，等号成立，

所以，所以.

②当且对于任意均成立时，

结合①可知且，此时无解.

综上可得，实数实数的取值范围为.

故答案为：.

【点睛】方法点睛：对于利用导数研究不等式的恒成立与有解问题的求解策略：

1、合理转化，根据题意转化为两个函数的最值之间的比较，列出不等式关系式求解；

2、构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；

3、利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题．

4、根据恒成立或有解求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，进行求解，若参变分离不易求解问题，就要考虑利用分类讨论法和放缩法，注意恒成立与存在性问题的区别．

15．（2025·天津市·一测）设函数，则函数的最小值为 ；若对任意，存在不等式恒成立，则正数的取值范围是 ．

【答案】  

【解析】的导数为，

则时，，单调递减；时，，单调递增，

可得在处取得极小值，且为最小值；

令，，

又对任意，存在，

有恒成立，即恒成立，即；

时，，当且仅当时取得最小值2，

，，

则时，，单调递减；时，，单调递增，

可得在处取得极小值，且为最小值；

所以，由，可得．

所以的取值范围是.

## **题型5：利用导数研究函数的零点与方程的根**

16．（2025·上海闵行·二模）定义的区间长度为．若且关于的不等式的解集的区间长度之和为，则当取最大值时，实数的值为 ．

【答案】

【分析】先由图象平移的性质得到区间长度与原题一致，再构造函数，利用导数分析单调性，利用对称性仅考虑即可，然后等于，大于和小于三种情况讨论，结合三次韦达定理求解.

【详解】由题意，为向右平移得到，即区间长度与原题一致，

不妨设，易得或，

即在和上单调递增，在上单调递减，

由关于对称，仅考虑即可，当分类讨论：

当时，

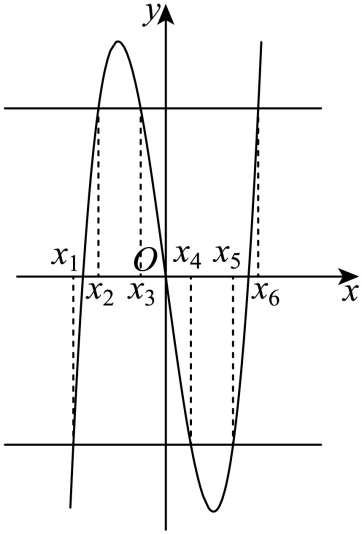
易得，即；

当时，

；

当时，

如下图，



不妨设的三个跟分别为，

不妨设的三个跟分别为，

由三次韦达定理可得

，

综上，当且仅当时，.

故答案为：.

17.（2025·上海普陀·二模）设，函数的表达式为，若函数恰有三个零点，则的取值范围是 .

【答案】

【难度】0.15

【知识点】根据二次函数零点的分布求参数的范围、利用导数研究函数的零点、根据函数零点的个数求参数范围

【分析】根据和的符号，将分为三个区间，，，并得到对应的不同的表达式，当时，无解；当时，有唯一解，通过分离常数得到，借助导数得到在上的值域，即可得到的取值范围；当时，将转化成关于的二次函数在上恰有两解的问题，即可求出的取值范围.

【详解】①当时，

所以，，

，

解得，不符合题意，所以在上无解.

②当时，，

所以，，，

令，所以，

即

令，所以，

所以，所以在单调递增，

所以，即.

此时在上有唯一解；

③当时，，



因为函数恰有三个零点，

所以在上有两解，

即在上有两解，

即在上有两解.

令

所以，即

解得，

综上①②③，所以的取值范围是.

故答案为：.

**题型6：导数压轴题--求参数的范围与最值**

18．（2025·上海杨浦·二模）已知函数的导函数为，若函数的定义域为，且不等式对任意成立，则称函数是“超导函数”.

(1)判断是否为“超导函数”，并说明理由；

(2)若函数与都是“超导函数”，且对任意，都有，，记，求证：函数是“超导函数”；

(3)已知函数是“超导函数”且，若有且仅有一个实数满足，求的取值范围.

【答案】(1)是，理由见解析；

(2)证明见解析；

(3)或.

【分析】（1）求出导数，再利用“超导函数”定义判断即可.

（2）求出的导数，作差变形，利用“超导函数”定义推理判断符号即得.

（3）构造函数，利用“超导函数”定义确定单调性可得，再构造函数，利用导数求出函数值集合，结合已知求出范围.

【详解】（1）函数，求导得，则，

所以是“超导函数”.

（2）函数，求导得，

则，

由函数与都是“超导函数”，得，

由对任意，都有，，得，

因此，即，

所以函数是“超导函数”.

（3）由函数是“超导函数”，得对任意，，

令，求导得，函数在上单调递增，且，

由，得，即，

因此，即，令，

由有且仅有一个实数满足，得直线与函数的图象有且只有1个交点，

，当时，；当时，，

函数在上单调递增，函数值的集合为，在上单调递减，函数值的集合为，

因此当或时，直线与函数的图象有且只有1个交点，

所以的取值范围或.

19．（2025·上海普陀·二模）已知，对于函数，，设集合，，记.

(1)若函数，请判断中元素的个数，并说明理由；

(2)设，函数，若，求的值以及曲线在点处的切线方程；

(3)设，函数，若对于任意的，皆有成立，求的取值范围.

【答案】(1)有2个元素，理由见解析

(2)，

(3)

【分析】（1）求的解即可得到答案.

（2）根据两曲线的位置关系，先求的值，再结合导数的几何意义求曲线的切线方程.

（3）先把问题转化成恒成立，再求函数的最小值即可.

【详解】（1）由.

当时，；

当时，.

所以有2个元素.

（2）将代入圆，

由相切.

此时，，

又，所以，所以，

切线方程，即.

（3）对于任意的，皆有成立，即函数的图象与圆系：无交点，所以恒成立.

因为，，所以，.

当时，恒成立，所以函数在上单调递增，且.

由.

当时，设，则，所以在上单调递增，

所以.

即当时，；

又，所以.

所以.

设，，则，

所以在上单调递增，所以.

由.

综上，实数的取值范围为：

20．（2025·上海黄浦·二模）设是的一个非空子集，函数的定义域为，若在上不是单调函数，且存在常数，使得对任意的成立，则称函数具有性质，称为该函数的一个下界．

(1)设，，判断函数，是否具有性质；

(2)设为常数，，，当且仅当满足什么条件时，函数，具有性质，且是该函数的一个下界；

(3)设，，，若函数，具有性质，求的取值范围：当在上述范围内变化时，若总是该函数的下界，求的取值范围．

【答案】(1)不具有，理由见解析；

(2)；

(3)，.

【分析】（1）借助导数，利用“函数具有性质”的定义推理判断.

（2）利用导数求出函数的单调区间及极小值，再利用“函数具有性质”的定义求解.

（3）求出的导数，按分类，结合“函数具有性质”的定义求出范围，并求出最小值函数，再换元求出最小值函数的最小值即可.

【详解】（1）函数，，求导得，

当时，；当时，，

函数在上单调递增，上单调递减，

于是函数在上不是单调函数，，，

函数在上的值域为，

不存在常数，使得对任意的成立，

所以函数，不具有性质*H*.

（2）函数，求导得，

当或时，；当时，，

函数在上单调递增，在上单调递减，

由函数，具有性质*H*，且是该函数的一个下界，得，

当时，函数在上不单调，，，

由，即，整理得，解得或，

当时，，当时，，

因此，，则，

所以当且仅当时，函数，具有性质，且是该函数的一个下界.

（3）当时，函数，

求导得，

当时，，，函数在上单调递增，不符合题意；

当时，，由，得；由，得，

函数在上单调递减，在上单调递增，在上不是单调函数，

，，因此，

令，则，令，

求导得，

函数在上单调递减，，

由当变化时，总是该函数的下界，得，

所以的取值范围是，的取值范围是.

**题型8：导数压轴题--证明不等式**

21．（2025·天津市·一测）已知函数．

(1)当，时，求的单调区间及极值；

(2)若，且的最大值小于，求*a*的取值范围；

(3)若，且关于*x*的方程有两个不等的实根，，，证明：．

【解析】（1）当，时，，

其定义域为，，

令，得或，令，得，

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  | 1 |  |
|  | + | 0 | - | 0 | + |
|  | 单调递增 | 极大值 | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

当时，有极大值，

当时，有极小值，

故的单调递增区间为，，单调递减区间为，

极大值为，极小值为．

（2）若，则，定义域为，，

当时，，在上单调递增，无最大值，不合题意，所以，

令，则，在上单调递增；

令，则，在上单调递减，

则，

因为的最大值小于，所以，

即在上恒成立．

设，问题转化为在上成立，

因为恒成立，所以在上单调递增，

又，所以，所以，故*a*的取值范围为．

（3）当时，，由，得，

即有两个不等的实数根，，且，

设，则，所以，即，

又，所以，

代入（\*）式得，所以，

故，

从而．

设，则，

设，则，

所以在上单调递增，

又，所以恒成立，

故，从而在上单调递增，所以，

从而，故，所以．

22．（2024·上海长宁·二模）设函数的定义域为，若存在实数，使得对于任意，都有，则称函数有上界，实数的最小值为函数的上确界；记集合{在区间上是严格增函数}；

(1)求函数的上确界；

(2)若，求的最大值；

(3)设函数一定义域为；若，且有上界，求证：，且存在函数，它的上确界为0；

【答案】(1)2

(2)4

(3)证明见解析

【分析】（1）由函数的单调性求出值域再根据题意可得；

（2）求出的表达式，求导，再利用在上严格递增得到导函数大于等于零恒成立，然后利用基本不等式求出最小值即可；

（3）假设存在，由单调性可得，再取，且可得，推出①②互相矛盾，然后令，根据题意求出值域最后确定上确界即可.

【详解】（1）因为函数在区间上严格递减，

所以函数的值域为，

所以函数的上确界为2.

（2），，

因为记集合{在区间上是严格增函数}，

所以恒成立，

因为，当且仅当时取等号，所以，

所以的最大值为4.

（3）证明：因为函数有上界，设，

假设存在，使得，

设，

因为，所以在上严格递增，进而，

得，

取，且，

由于，得到，①

由，得，②

显然①②两式矛盾，所以假设不成立，

即对任意，均有，

令，则，

因为当时，，

所以在上严格递增，，

因为的值域为，

所以函数的上确界为零.

【点睛】关键点点睛：

（1）第二问的关键是导函数大于等于零恒成立，用基本不等式求解；

（2）第三问关键是根据不等式的结构能够想到取，再得到与当，得到矛盾.

23．（2025·上海松江·二模）已知.

(1)若是函数的一个极值点，求曲线在点处的切线方程；

(2)讨论函数的单调性；

(3)已知实数，若点是曲线上两点，直线*AB*的斜率为，求证：.

【答案】(1)

(2)答案见解析

(3)证明见解析

【分析】（1）利用，得出的值，再检验是函数的一个极值点，最后利用点斜式求切线方程；

（2）求导，研究的正负性，分和两种情况，再结合一元二次函数的图象研究其正负性即可；

（3）化简，再令，将问题转化为利用导数证明不等式，再通过构造函数研究函数的最值.

【详解】（1）的定义域为，

由，得，

因为是函数的一个极值点，

所以，即，解得，

则，，

则得或；得，

则在和上单调递增，在上单调递减，

则是的极小值点，

又，

则切线方程为，整理得.

（2）的定义域为，，

令，其对称轴为，

①当，即时，，则在上单调递增；

②当，即或时，

（i）当时，的两根为，

且，

则当或时，，；

当时，， .

（ii）当时，的对称轴，且，

则在上恒成立，即在上恒成立.

综上，当时，在上单调递增；

当时，在和上单调递增，在上单调递减.

（3）已知，则，

则，

则，

要证，即证，

即证，

令，则只需证，

先证，即证，

令，则，

所以在上单调递增，则，即；

再证，即证，

令，则，

所以在上单调递增，则，即.

综上，得证.

24．（24-25高三上·上海黄浦·期末）函数的定义域为，在上仅有一个极值点，方程在上仅有两解，分别为、，且．若，则称函数在上的极值点左偏移；若，则称函数在上的极值点右偏移．

(1)设，，判断函数在上的极值点是否左偏移或右偏移？

(2)设且，，，求证：函数在上的极值点右偏移；

(3)设，，，求证：当时，函数在上的极值点左偏移．

【答案】(1)函数在上的极值点不偏移

(2)证明见解析

(3)证明见解析

【分析】（1）先求的根及的极值点，再根据题设定义，即可求解；

（2）先求的根，对求导，得到，通过计算得到，再利用二次函数的性质，即可求解；

（3）设的两个零点为，根据条件得到，再构造函数，利用函数的单调性，得到，即可求解.

【详解】（1）由，得到，所以，

又，由，得到，又当时，，当时，，

所以只有一个极值点，且极值点为，此时，

所以函数在上的极值点不偏移.

（2）因为， 且，，

由，得到或，则，

又，，则有两根，

不妨设为，且，又，所以，

又时，，时，，所以函数在上只有一个极值点，且，

又，

所以，故函数在上的极值点右偏移.

（3）由题知，，令，得到，

当时，，当时，， 所以是的极值点，

且在区间上单调递增，在区间上单调递减，

又，时，，时，，，

则有两个零点，不妨设为，且，所以，，

令，

则在恒成立，

所以在区间上单调递增，

所以，即，

故，又，

故，得到，即，

所以当时，函数在上的极值点左偏移．

【点睛】方法点睛：本题第三问考查极值点偏移问题，解决极值点偏移的主要方法有：

1．构造对称函数；

2．比值换元；

3．对数平均不等式.

25．（2025·上海奉贤·二模）函数，其中，定义域是一切实数．

(1)计算的值并指出其几何意义；

(2)当时，方程只有一个解，求实数的取值范围；

(3)设，，，，，．求证：．

【答案】(1)，几何意义是函数在点处切线的斜率是；

(2)；

(3)证明见解析.

【分析】（1）根据极限的计算方法求值，并理解导数的几何意义；

（2）分离参数得，设，利用利用导数分析函数的单调性，求其值域即可；

（3）结合（2）中的结论，先得到，进一步类推，即可证明结论.

【详解】（1）因为，

所以 ，

几何意义是函数在点处切线的斜率是.

（2）变形得到，

令，，

又，所以函数在内恒小于零，

所以函数在单调递减 ，又，

所以值域为，所以的取值范围为.

（3）由（2）知函数在单调递减，且存在唯一的零点使得，即，

，

根据函数单调性知，

即，依次类推，得到，

同理，

即，

，

因为，所以，

，所以得到 ，

，

，

，

所以.

26．（2025·上海宝山·二模）定义在上的可导函数，集合为正整数，其中称为的自和函数，称为的固着点. 已知.

(1)若，，求的值及的固着点；

(2)若，是的自和函数，且在上是严格增函数，求的最大值；

(3)若，，且是的固着点，求的取值范围，并证明：.

【答案】(1)，固着点

(2)

(3)，证明见解析

【知识点】利用导数研究函数的零点、函数新定义、利用导数证明不等式、解余弦不等式

【分析】（1）根据题设定义得，进而有，即可求解；

（2）根据条件得到在区间上恒成立，从而有，即可求解；

（3）法一，根据题设得到在上有唯一的解，构造函数，利用导数与函数单调性间的关系，求得的单调性，进而可得，

再构造函数，利用其单调性，即可求解；法二，前同法一，得，构造函数，利用导数与函数单调性间的关系，求其单调区间，利用单调性，即可求解.

【详解】（1）由题得，所以，

因为，所以，解得，

所以，固着点.

（2）由题得，则，

所以，因为是上的严格增函数，

所以在区间上恒成立，

由，得到，所以，

所以，因此的最大值是.

（3）（方法一）由题得，，

所以，

因为，且是的固着点，所以（\*）在上有唯一的解，

记，则，所以在是严格减函数，

从而，又当时，，故的值域是，

所以，即，

记，则由上述可知是的严格减函数且，

，

因为，所以，所以  ①

又，

记，则，

因为，所以，所以，

所以是上的严格增函数，

故，从而  ②

由①②可知，，即，

又是的严格减函数，所以，故.

（方法二）

由题得，，所以，

因为且是的固着点，所以（\*）在上有唯一的解

求导得，

当时，，是上的严格减函数，

所以，所以方程（\*）无解；

当时，

（ⅰ）当时，在恒成立，故是上的严格增函数，

所以，所以方程（\*）无解；

（ⅱ）当时，如下表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | - | 0 | + |
|  | 严格减 | 极小值 | 严格增 |

可知在严格减，在严格增，

又，，当时，，

所以方程（\*）在无解，在有唯一解，满足题意的的取值范围，

因为是的唯一解，所以，

又，令，

则，所以是上的严格减函数，

所以，即，

又当时，，所以，

又在上有唯一的零点，则，

综上，，此时.

**题型9：导数压轴题--证明具有某种性质**

26．（2024·上海虹口·一模）设．若函数满足恒成立，则称函数具有性质．

(1)判断是否具有性质，并说明理由；

(2)设，若函数具有性质，求实数*a*的取值范围；

(3)设函数的定义域为**R**，且对任意以及，都有．若当时，恒有．求证：函数对任意实数*a*均具有性质．

【答案】(1)具有，理由见解析

(2)

(3)证明见解析

【分析】（1）首先判断为偶函数，再判断出时，即可；

（2）求导得，得到其单调性，再对分和以及讨论即可；

（3）根据定义知，再利用反证法即可证明.

【详解】（1）记，

显然，则其是偶函数.

当时，，故，

所以对恒成立，具有性质.

（2），

当时严格单调递增，

当时严格单调递减.

若，则，函数在上严格单调递增，恒成立，

此时函数具有性质.

若，则函数在上严格单调递减，

，

故函数不具有性质.

若，则函数在上严格单调递增，

“对恒成立”等价于“对恒成立”，

而在上严格单调递减，在上严格单调递增，

故，即，

即.

综上，的取值范围是.

（3）对任意及，

都有，

即对任意都有.

假设存在使得不具有性质，

则存在使得.

若，则.

当时，则在中取，

对任意有，

于是，

即.

而当时，，

故有，矛盾.

当时，记，则，

由得，得，

故.

与当时同理可得矛盾.

若，则，与时同理可得矛盾.

综上，假设不成立，即函数对任意实数均具有性质.

【点睛】关键点点睛：本题第三问的关键是利用反证法得到与定义像矛盾的结论.

27．（2024·上海奉贤·一模）若函数的图象上存在个不同点、、、处的切线重合，则称该切线为函数的一条点切线，该函数具有点切线性质．

(1)判断函数，的奇偶性并写出它的一条点切线方程（无需理由）；

(2)设，判断函数是否具有点切线性质，并说明理由；

(3)设，证明：对任意的，，函数具有点切线性质，并求出所有相应的切线方程．

【答案】(1)偶函数，一条点切线方程为

(2)没有，理由见解析

(3)证明见解析，切线方程为和

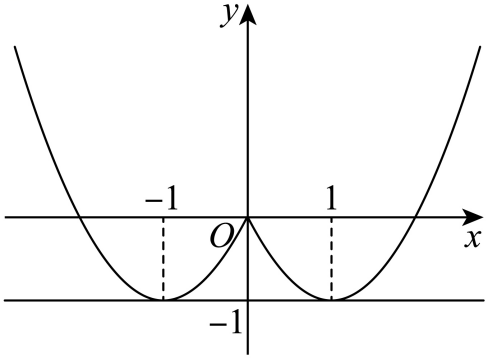
【分析】（1）利用函数奇偶性的定义可得出函数的奇偶性，数形结合可得出该函数的一条点切线方程；

（2）求出，分析函数的单调性，即可得出结论；

（3）取点、、，利用导数求出曲线在三处的切线方程，利用这三条切线重合可得出，然后对、、的关系进行讨论，即可求出对应的切线方程.

【详解】（1）令，其中，则，

所以，函数为偶函数，且，如下图所示：



由图可知，函数的一条点切线方程为.

（2）因为，该函数的定义域为，且，

令，其中，则，

所以，函数在上为增函数，

因此，不可能存在、且，使得，

因此，函数不具有点性质.

（3）取点、、，

因为，则，

所以，曲线在点处的切线方程为，

即，

曲线在点处的切线方程为，

曲线在点处的切线方程为，

由题意可知，这三条切线重合，

则，

由上得，则，，，

（i）若，，，

则，所以，，

因为，则（舍去）；

（ii）若，，中至少有一个成立，

不妨设，则，

若，则（舍去），所以，，

故或.

综上所述，点切线方程为和.

【点睛】关键点点睛：本题第（3）问题考查点切线的新定义，解题的关键就是利用切线重合得出，通过分析、、之间的关系来求解.

28．（24-25高三上·上海·期中）函数的导函数为，令，称是的特征函数.若对一切恒成立，则称函数是上的绝对增函数.

(1)已知，判断函数是否是上的绝对增函数，并说明理由；

(2)已知，函数是上的绝对增函数，求的值；

(3)函数是上的绝对增函数，其特征函数在上有唯一的零点，求证：是函数的极值点.

【答案】(1)函数是上的绝对增函数，理由见详解

(2)

(3)证明见详解

【知识点】解正弦不等式、利用导数研究函数的零点、求已知函数的极值点、函数新定义

【分析】（1）求导，根据绝对增函数的定义分析判断即可；

（2）求导，根据题意可得在内恒成立，结合正弦函数性质分析求解；

（3）利用反证法，先证在上有唯一的零点，在结合导数与单调性之间的关系证明结果即可.

【详解】（1）函数是上的绝对增函数，理由如下：

因为，则，可得，

且，则，可得，

所以函数是上的绝对增函数.

（2）因为，则，

可得，

若函数是上的绝对增函数，

则在内恒成立，即在内恒成立，

因为，则，

令，解得，

可得，所以.

（3）显然，均在上连续不断，

若函数是上的绝对增函数，则恒成立，

又因为函数在上有唯一的零点，

可知函数，均在上至多有一个零点，且必有一个函数有零点，

先证：在上有唯一的零点，

假设在上没有零点，则在上有唯一的零点，

可知（或）恒成立，

不妨设恒成立，则恒成立，

可知在上单调递增，

当是，，两者相矛盾；

所以假设不成立，即在上有唯一的零点；

再证：是函数的极值点，

假设不是函数的极值点，

则存在，使得，且在上为单调函数，

不妨设在上单调递增，

当时，，

可知在上单调递减，且，则；

当时，，

可知在上单调递增，且，则；

两者相矛盾，假设不成立，所以是函数的极值点.

【点睛】关键点点睛：对于（3）利用反证思想证明问题，对于直接说明比较麻烦时，可以利用反证思想说明问题.

**题型10：导数压轴题--证明充要条件**

29．（2024·上海嘉定·二模）已知常数，设，

(1)若，求函数的最小值；

(2)是否存在，且，，依次成等比数列，使得、、依次成等差数列？请说明理由．

(3)求证：“”是“对任意，，都有”的充要条件．

【答案】(1)

(2)答案见解析

(3)证明见解析

【分析】（1）求导分析的符号，的单调性，最值，即可得出答案．

（2）根据题意可得，，则，分两种情况：当时，当时，讨论是否满足条件，即可得出答案．

（3）由，借助换元法，令，可得，分别证明充分性和必要性，即可得出答案．

【详解】（1）当时，，则，

在上，单调递减，

在上，单调递增，

所以；

（2）若、、依次成等比数列，则，

若、、成等差数列，则，

所以，

所以，

当时，成立，

当时，则，联立，得，

，即，

所以，与矛盾，

所以时，存在，，满足条件，

当时，不存在，，满足条件；

（3），则，

，

所以，

又



，

令，

上式



，

令，则恒成立，单调递减，

所以，

充分性：若，则，则恒成立，

必要性：要使得式恒成立，则恒成立，即．

【点睛】关键点点睛：本题关键点在于对“对任意，，都有”的转化，借助换元法，可得其等价为“对任意，，都有，其中”.

30．（2024·上海奉贤·三模）若定义在上的函数和分别存在导函数和．且对任意均有，则称函数是函数的“导控函数”．我们将满足方程的称为“导控点”．

(1)试问函数是否为函数的“导控函数”？

(2)若函数是函数的“导控函数”，且函数是函数的“导控函数”，求出所有的“导控点”；

(3)若，函数为偶函数，函数是函数的“导控函数”，求证：“”的充要条件是“存在常数使得恒成立”．

【答案】(1)是

(2)

(3)证明见解析

【分析】（1）根据“导控函数”得定义求解即可；

（2）由题意可得，再根据“导控点”的定义可得，求出，进而可求出，进而可得出答案；

（3）根据“导控函数”的定义结合充分条件和必要条件的定义求证即可.

【详解】（1）由，得，由，得，

因为，所以函数是函数的“导控函数”；

（2）由，得，

由，得，

由，得，

由题意可得恒成立，

令，解得，

故，从而有，所以，

又恒成立，即恒成立，

所以，所以，

故且“导控点”为；

（3）充分性：若存在常数使得恒成立，

则为偶函数，

因为函数为偶函数，所以，

则，即，

所以恒成立，所以；

必要性：若，则，所以函数为偶函数，

函数是函数的“导控函数”，

因此，

又，

因此函数是函数的“导控函数”，

所以，即恒成立，

用代换有，

综上可知，记，

则，

因此存在常数使得恒成立，

综上可得，“”的充要条件是“存在常数使得恒成立”．

【点睛】关键点点睛：理解“导控函数”和“导控点”的定义是解决本题的关键.

31．（2025·上海浦东新·二模）定义域为的可导函数满足，在曲线上存在三个不同的点，使得直线与曲线在点处的切线平行（或重合）．若成等差数列，则称为“等差函数”；若成等差数列且均为整数，则称为“整数等差函数”．

(1)设，，分别判断和是否为“整数等差函数”，直接写出结论；

(2)若为“整数等差函数”，求实数的最小值；

(3)已知的导函数在上为增函数，且存在一个正常数， 使得对任意，成立，证明：为“等差函数”的充要条件是为常值函数．

【答案】(1)不是“整数等差函数”，是“整数等差函数”

(2)答案见解析；

(3)证明见解析.

【分析】（1）设公差为，根据所给定义及导数的几何意义得到，即可判断；

（2）设公差为，则且，由得到从而确定的最小值；

（3）首先证明充分性，再说明必要性，设公差为，结合所给定义得到，令，结合推出为常值函数.

【详解】（1）假设成等差数列，得，

设公差为，则，

对于：直线的斜率，

因为，所以曲线在点处的切线斜率为，

由题意，恒成立，

取，，则成等差数列且均为整数，故是“整数等差函数”．

对于，直线的斜率，

因为，所以曲线在点处的切线斜率为，

由题意，

若，则，

令，，则恒成立，所以在上单调递减，

所以，即在上恒成立，

即恒成立，所以无解，

故不是“整数等差函数”．

（2）因为为“整数等差函数”，所以成等差数列且均为整数，

设公差为，则，且，

直线的斜率，

因为，所以曲线在点处的切线斜率为，

由题意，，

又的定义域为，有，

当时,,此时,无罪小值；

当时,因为，，

所以





，

则，可取使等号成立，故的最小值为．

（3）充分性，因为为常值函数，所以，

任意取等差数列 ，则直线的斜率，

曲线在点处的切线斜率为，

因为，所以为“等差函数”．

必要性，因为为“等差函数”，所以成等差数列，

设公差为，则，

直线的斜率，

曲线在点处的切线斜率为，

由题意，,

，

令，

则

，

令，

则，

因为在上为增函数，所以，在上为增函数，

因为，所以，在上为增函数，

因为，所以在上恒成立，

又，由的单调性知，

故，，

，为常数，

，

，

，

接下来，一方面，因为，且在上为增函数，

所以在上为增函数，故，，

由，可得，

另一方面，因为，

所以，可得，

以此类推，在上恒成立，即为常值函数．

命题得证！

32．（24-25高三上·上海·期中）若定义在上的函数和分别存在导函数和. 且对任意实数，都存在常数，使成立，则称函数是函数的“控制函数”，称为控制系数.

(1)求证: 函数是函数的“控制函数”;

(2)若函数是函数的“控制函数”，求控制系数*k*的取值范围；

(3)若函数为偶函数，函数是函数的“控制函数”， 求证:“”的充要条件是“存在常数， 使得恒成立”.

【答案】(1)证明见解析

(2)

(3)证明见解析

【分析】（1）结合定义，只需证明即可得；

（2）结合定义，构造函数，结合导数求出最小值即可得；

（3）先证明充分性：若存在常数使得恒成立，结合偶函数定义计算即可得；再证明必要性：由题意可得，又，则可结合偶函数性质得到，即可得证.

【详解】（1），，则，故，

即恒成立，故函数是函数的“控制函数”；

（2）有， ，

则，，

令，

则

，

由，

故当时，，当时，，

即在上单调递减，在上单调递增，

故，即有，

则当时，函数是函数的“控制函数”，

即；

（3）充分性：若存在常数使得恒成立，

则为偶函数，

因为函数为偶函数，所以，

则，即，

所以恒成立，所以；

必要性：若，则，所以函数为偶函数，

函数是函数的“控制函数”，

因此，又，

因此函数是函数的“控制函数”，

所以，即恒成立，

用代换有，

综上可知，记，

则，

因此存在常数使得恒成立，

综上可得，“”的充要条件是“存在常数使得恒成立”．

【点睛】关键点点睛：本题关键点在于正确理解定义，从而可构造函数或解决问题.

33．（24-25高三下·上海虹口·期中）对于定义在上的函数和，，设.

(1)若，，求；

(2)若，，，求实数的取值范围；

(3)已知对任意，均有，记，求证：“对任意，函数零点个数均有限”的充要条件是“在上是严格增函数”.

【答案】(1)；

(2)；

(3)证明见解析.

【知识点】求已知函数的极值、函数新定义、求指数函数在区间内的值域

【分析】（1），分析出其在上的值域即可；

（2）利用导数求得当时取得极小值，再分和讨论即可；

（3）充分性利用函数单调性即可证明，必要性先证明是严格增函数．再利用反证法证明即可.

【详解】（1）记，

函数上的值域为，即．

（2）设在上的最小值．

.

当时，严格增；当时，严格减；

当时，严格增．当时取得极小值．

当时，舍去．

当时，．

综上，．

（3）（充分性）若是严格增函数，

则的最小值为，而，

故对任意，都有，即与是相同函数．

故是严格增函数，所以严格增函数，故对任意的零点个数有限．

（必要性）对任意，都有，故的值域为，

即在上的最小值为．

先证是严格增函数．

对任意，函数和的最小值分别为和，

则由最小值的定义，，故函数是增函数．

假设存在，使得，则对任意，均有，

从而方程的解有无限多个，与条件＂对任意，函数零点个数均有限＂矛盾．

故假设不成立，从而是严格增函数．

再证对任意，函数的最小值为．

假设存在使得，取，则的最小值为．

由于严格增，知．而，故，矛盾．

所以假设不成立，对任意，函数的最小值为．

另证：再证对任意，函数的最小值为．

．假设，则由在上的最小值为，

存在使得，故在上的最小值为．

取，则在上的最小值为，

故．但由为严格增函数，知，矛盾．

所以假设不成立，所以．

即对任意，函数的最小值为．

而对任意的值域为，故．

于是与是相同函数，所以是严格增函数．

33．（2025·上海·模拟预测）设定义域为的函数，对于，定义.

(1)设，求；

(2)设，是否存在，使得是一段闭区间？若存在，求的取值范围；若不存在，请说明理由；

(3)函数的定义域是，函数值恒正，其导函数为；当时，.若对任意，均有，求证：“函数是上的严格增函数”的充要条件是“”.

【答案】(1)

(2)存在满足条件的，且，理由见解析

(3)证明见解析

【知识点】解不含参数的一元二次不等式、用导数判断或证明已知函数的单调性、函数新定义、函数极值的辨析

【分析】（1）根据题设有，化简并解一元二次不等式求；

（2）构造，对其求导并讨论，研究是否为一段闭区间，确定存在性，进而得参数范围；

（3）从充分、必要性两方面判断“函数是上的严格增函数”与“”的推出关系，即可证结论.

【详解】（1）由题设，将化简得，

解得，故；

（2）存在满足条件的，且，理由如下：

因为，代入定义整理得：，

设，则，

令，得，或，

当时，必存在，（设）；

根据的关系，列表如下：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 | 极大值 | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

由此是函数的极大值点，故当时，是一段闭区间，

即，解得，

因此，

特别地，当时，，

故仍是一段闭区间，故.

当时，当且仅当时，，

列表可得：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

所以是函数的极小值点，且取得最小值，

当时，是一段闭区间，即，解得，

由此得.

综上所述，存在满足条件的，且；

（3）假设，若，则，因此矛盾，故，

先证必要性：因为函数是上的严格增函数且，

当时，；当时，，

因此，

因此必要性得证；

再证充分性：

引理：对任意，当满足时，，已知，

假设，设，任取，则，

因为函数是严格增函数，所以，即，

所以，由此，因此考虑构造，

当，则，而，

函数是严格减函数，，故矛盾，即，

下面证明函数在上为严格增函数：

任取，若，联立上式可得



，

而，又因为是严格减函数，

则.由于，

所以，故.

同理，可证函数在上为严格增函数，

且，故函数在上为严格增函数，因此充分性得证.

【点睛】关键点点睛：第三问，问题化求证“函数是上的严格增函数”与“”互为充要关系.

34．（24-25高三下·上海·阶段练习）设定义域为的函数，对于，定义.

(1)若，求；

(2)若，是否存在*a*，使得是一段闭区间？若存在，求*a*的取值范围；若不存在，请说明理由；

(3)若对任意，，其中，均是上的恒正函数.证明：“对任意成立”的充要条件是“任取，均有且”.

【答案】(1)

(2)存在，.

(3)证明见解析

【知识点】函数单调性、极值与最值的综合应用、函数新定义、充要条件的证明、解不含参数的一元二次不等式

【分析】（1）根据题得到不等式，化简并解一元二次不等式求得；

（2）根据新定义构造函数，利用导数研究不同情况下的单调性，结合图象，利用数形结合思想研究是否为一段闭区间，确定存在性，进而得参数范围；

（3）利用对称性，结合新定义的意义，证明必要性；利用反证法，构造适当推出矛盾,证得充分性.

【详解】（1）由题设，将化简得，

解得，故.

（2）因为，代入定义得：，

构造函数，

求导得.

当即时，存在，,

所以当、时，，

进一步，列表可得：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 0 |  |  |  |
|  |  | 0 |  | 0 |  | 0 |  |
|  | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 | 极大值 | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

由此是函数的极大值点，时，,

故当且仅当时，是一段闭区间，因此，

特别地，当时，，故仍是一段闭区间，故.

当时，当且仅当时，.

同理，是函数的极小值点，且取得最小值，同样时，,

所以当且仅当时，是一段闭区间，由此得，

综上所述，存在满足条件的*a*，且.

（3）对任意，，其中、均是上的恒正函数.

必要性：

因为对任意成立，所以，

即与成对出现在集合中，故.

当时，，从而，

所以且.

充分性：

不妨设，取满足（\*）,

则，

而，，所以，

则，即，与（\*）矛盾.

同理可证时也矛盾.

所以对任意，都有，得证.

【点睛】关键点点睛：小问（3）关键点：

首要的要分清条件和结论，明确必要性和充分性指的是从谁推谁；

其次，在必要性的证明中利用对称性得到与成对出现在集合中，得出，进而进行证明是关键；

最后，在证明充分性的过程中使用反证法，并构造合适的推出矛盾是关键.

**题型11：导数压轴题--存在性问题**

35．（2024·上海崇明·一模）定义：若曲线和曲线有公共点*P*，且曲线在点*P*处的切线与曲线在点*P*处的切线重合，则称与在点*P*处“一线切”.

(1)已知圆与曲线在点处“一线切”，求实数*a*的值；

(2)设，，若曲线与曲线在点*P*处“一线切”，求实数*a*的值；

(3)定义在上的函数的图象为连续曲线，函数的导函数为，对任意的，都有成立.是否存在点使得曲线和曲线在点处“一线切”？若存在，请求出点的坐标，若不存在，请说明理由.

【答案】(1)

(2)

(3)不存在点满足条件，理由见解析

【分析】（1）利用导数求出曲线在点处的切线方程，再根据圆心到切线的距离为半径可求的值；

（2）设出公切点，则可得关于切点横坐标与的方程组，解方程组可求得的值；

（3）假设存在满足题意，则根据“一线切”可得且，化简整理后得到，从而得到矛盾.

【详解】（1），所以曲线在点处的切线方程为，

即，

因为圆与曲线在点处“一线切”，

所以直线与圆在点处相切，

所以，所以.

（2）设，，

由题意，，所以，

解得.

（3）假设存在满足题意，

则有，对函数求导得：，

于是，即，

平方得，

即有，因此，

整理得，而恒有成立，

则有，从而，显然，

于是，即与恒成立矛盾，

所以假设不成立，即不存在点满足条件

【点睛】思路点睛：新定义中的“一线切”问题，本质上就是不同曲线的共切点的切线问题，其解决问题的方法是构建关切切点横坐标的方程或方程组.

36．（2024·上海崇明·一模）定义：若曲线和曲线有公共点*P*，且曲线在点*P*处的切线与曲线在点*P*处的切线重合，则称与在点*P*处“一线切”.

(1)已知圆与曲线在点处“一线切”，求实数*a*的值；

(2)设，，若曲线与曲线在点*P*处“一线切”，求实数*a*的值；

(3)定义在上的函数的图象为连续曲线，函数的导函数为，对任意的，都有成立.是否存在点使得曲线和曲线在点处“一线切”？若存在，请求出点的坐标，若不存在，请说明理由.

【答案】(1)

(2)

(3)不存在点满足条件，理由见解析

【分析】（1）利用导数求出曲线在点处的切线方程，再根据圆心到切线的距离为半径可求的值；

（2）设出公切点，则可得关于切点横坐标与的方程组，解方程组可求得的值；

（3）假设存在满足题意，则根据“一线切”可得且，化简整理后得到，从而得到矛盾.

【详解】（1），所以曲线在点处的切线方程为，

即，

因为圆与曲线在点处“一线切”，

所以直线与圆在点处相切，

所以，所以.

（2）设，，

由题意，，所以，

解得.

（3）假设存在满足题意，

则有，对函数求导得：，

于是，即，

平方得，

即有，因此，

整理得，而恒有成立，

则有，从而，显然，

于是，即与恒成立矛盾，

所以假设不成立，即不存在点满足条件

【点睛】思路点睛：新定义中的“一线切”问题，本质上就是不同曲线的共切点的切线问题，其解决问题的方法是构建关切切点横坐标的方程或方程组.

37．（2024·上海·三模）设函数的定义域为D，对于区间，当且仅当函数满足以下①②两个性质中的任意一个时，则称区间是的一个“美好区间”．

性质①：对于任意，都有；性质②：对于任意，都有．

(1)已知，．分别判断区间和区间是否为函数的“美好区间”，并说明理由；

(2)已知且，若区间是函数的一个“美好区间”，求实数的取值范围；

(3)已知函数的定义域为，其图像是一条连续不断的曲线，且对于任意，都有．求证：函数存在“美好区间”，且存在，使得不属于函数的任意一个“美好区间”．

【答案】(1)区间是函数的“美好区间”，区间不是函数的“美好区间”，理由见解析；

(2)

(3)证明见解析

【分析】（1）分别求出函数在区间和区间上的值域，结合“美好区间”的定义判断即可；

（2）记，，根据“美好区间”的定义可得：或，利用导数研究在上的单调性，分，，以及四种情况讨论在区间上的值域，利用集合间的关系，即可得到实数的取值范围；

（3）对于任意区间，记，根据单调性得到，若为的“美好区间”必满足性质②，转化为或，得出函数一定存在“美好区间”，记，结合函数的单调性和零点存在定理，得到存在，使得，即可证明结论.

【详解】（1）区间和区间都是函数的“美好区间”，理由如下：

由，

当时，，所以区间是函数的“美好区间”

当时，，不是的子集，

所以区间不是函数的“美好区间”

（2）记，

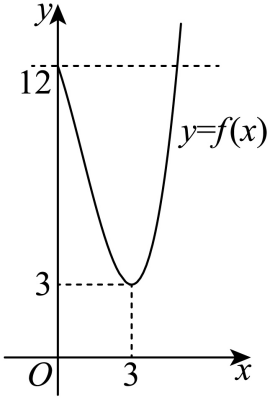
若区间是函数的一个“美好区间”，则或

由，可得，

所以当或时，，则的单调递增区间为：，；

当时，，则的单调递增区间为：，

且，，，得到在的大致图像如下：



(i)当时，在区间上单调递减，且，

所以，则，即对于任意，都有，满足性质②,

故当时，区间是函数的一个“美好区间”；

(ii)当，在区间上单调递减，在上单调递增，此时，

所以，，则当时，区间不是函数的一个“美好区间”；

(iii)当时，在区间上单调递减，在上单调递增，且，此时，

所以，，则当时，区间不是函数的一个“美好区间”；

(iv)当时，在区间上单调递减，在上单调递增，且，此时，

因为，则要使区间是函数的一个“美好区间”，则，即，

构造函数，

则，

由于，所以恒成立，则在区间上单调递增，

所以，则，不满足题意，

故当时，区间不是函数的一个“美好区间”，

综上，实数的取值范围是

（3）对于任意区间，记，

因为对于任意，都有，

所以在区间上单调递减，故，

因为，即的长度大于的长度，故不满足性质①，

所以若为的“美好区间”必满足性质②，即，

即只需要或，

由显然不恒成立，所以存在常数使得，

如果，取，则区间满足性质②；

如果，取，则区间满足性质②；

综上，函数一定存在“美好区间”；

记，则的图象连续不断，下证明有零点，

由于在上单调递减，则在上是减函数，记

若，则是的零点；

若，则，记，，

由零点存在定理，可知存在，使得；

若，则，记，，

由零点存在定理，可知存在，使得；

综上，有零点，即，

因为所有“美好区间”都满足性质②，故，否则与性质②矛盾；

即存在，使得不属于函数的任意一个“美好区间”，证毕.

【点睛】思路点睛：本题是新定义题，解题关键是理解“美好区间”的含义，对于区间是函数的一个“美好区间”，实质就是在区间上的值域满足或，这样就把新定义转化为一般函数及导数的问题.