**专题08 两角和与差的三角函数（五大题型+跟踪训练）**



**目录：**

**题型1：已知两角的正、余弦，求和、差角的余弦、正弦、正切**

**题型2：求15°等特殊角的三角函数值**

**题型3：用和、差角的余弦、正弦、正切公式化简，求值**

**题型4：逆用和、差角的余弦、正弦、正切公式化简，求值**

**题型5：两角和与差的三角函数综合解答题**

**题型1：已知两角的正、余弦，求和、差角的余弦、正弦、正切**

1．等于（    ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】根据余弦的两角和公式可得.

【解析】由余弦的两角和公式可得.

故选：A

2．已知*x*是第二象限角，，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】根据平方关系得，令即可得解.

【解析】是第二象限角，，是第二象限角，

，

.

故选：A.

【点睛】本题考查了平方关系以及两角和余弦公式的应用，属于基础题.

3．若，都是锐角，且，，则（    ）

A． B． C．或 D．或

【答案】A

【分析】由平方关系求得，，然后由两角差的余弦公式计算．

【解析】，都是锐角，则，

则由题意得，又，

．

故选：A．

4．已知cos＝，*x*∈(0，π)，则sin *x*的值为（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】先算出，然后利用即可算出答案

【解析】由，所以，又，得，

所以



故选：B．

5．已知，，则（    ）

A．1 B．2

C． D．

【答案】C

【分析】利用同角三角函数的关系式求出，然后利用正弦的和角公式即可求出答案.

【解析】因为，，所以，

所以.

故选：C.

6．已知，均为锐角，，，则（    ）

A． B．或

C． D．

【答案】A

【分析】先利用同角的三角函数的基本关系式可求的值，再利用两角差的正弦可求的值.

【解析】因为，均为锐角，故，

因为，，

所以，，

所以



.

故选：A.

7．设为第二象限角，若，则=（    ）

A． B．

C． D．2

【答案】B

【分析】结合平方关系解得，由商数关系求得，再由两角和的正切公式计算．

【解析】由得，，

是第二象限角，，，

所以由，解得：，

所以，

．

故选：B．

8．下列说法中正确的是（    ）

A．存在，使成立

B．对任意都成立

C．能根据公式直接展开

D．在中，若为钝角，则的值大于1

【答案】A

【分析】对于A，举例判断；对于B，由正切函数的定义域判断；对于C，由正切函数的定义域判断对于D，根据为钝角，由两角和的正切公式判断.

【解析】对于A，当时，成立；

对于B，两角和的正切公式的适用范围是；

对于C，因为没有意义，所以不能直接展开；

对于D，因为为钝角，所以为锐角，从而均为锐角，

所以，且．

故．

故选：A

**题型2：求15°等特殊角的三角函数值**

9．求下列各式的值．

(1)；

(2)；

(3)；

(4)

【答案】(1)

(2)

(3)

(4)

【分析】（1）利用两角和的余弦公式计算可得；

（2）利用两角和的余弦公式计算可得；

（3）利用诱导公式及两角差的余弦公式计算可得；

（4）利用诱导公式及两角差的余弦公式计算可得；

【解析】（1）解：

（2）解：

（3）解：



（4）解：



10．的值是（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】将非特殊角转化为特殊角与的和，然后利用两角和的正弦公式即可求解.

【解析】解：

.

故选：D.

11．利用和（差）公式，求下列各式的值

(1)

(2)

(3)

(4)

【答案】(1)

(2)

(3)

(4)2-

【分析】利用和（差）公式的三角函数公式求解.

【解析】（1）解：，

；

（2），

；

（3），

；

（4），

.

12．（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】根据诱导公式以及两角差的正切公式计算可得结果.

【解析】.

故选：A.

13．已知、均为锐角，则下列不等式一定成立的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】B

【分析】利用特殊值排除错误选项，然后证明正确的结论成立.

【解析】对于A选项，当时，，故A选项不一定成立.

对于B选项，由于、均为锐角，所以的范围均为，所以

，故B选项不等式一定成立.

对于C选项，当时，，故C选项不一定成立.

对于D选项，当时，，，所以，，故D选项不一定成立.

故选B.

【点睛】本小题主要考查两角和与差的正弦、余弦公式，考查三角恒等变换，属于基础题.

**题型3：用和、差角的余弦、正弦、正切公式化简，求值**

14．已知，，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】利用两角差的余弦公式可得出的值，再利用两角和的余弦公式可求得的值.

【解析】因为，,

解得，因此，.

故选：B.

15．已知，且为锐角，则（    ）

A． B．或 C． D．

【答案】A

【分析】由的正弦值，结合公式，求出的余弦值，再利用两角和差公式求的值即可.

【解析】因为，且为锐角，

由公式，

得：；

；

由两角和差公式得：，

从而，

因为为锐角，所以，且，

得.

故选：A.

16．已知，，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】由平方关系以及两角差的正弦公式即可求解.

【解析】因为，，

所以，，

所以

.

故选：A.

17．若，，则 （    ）

A． B． C．4 D．1

【答案】A

【分析】由，可以得出，再结合,可以求值.

【解析】，

所以，

即，，

因，则有，即，

所以．

故选：A.

18．已知，则（    ）

A． B． C．2 D．

【答案】D

【分析】根据，结合两角和差的正余弦公式与同角三角函数的关系化简求解即可.

【解析】因为，所以，

所以．

故选：D．

19．已知角，且，则（    ）

A．－2 B． C． D．2

【答案】C

【分析】根据已知条件，分别求得和，再由正切的差角公式即可求得结果.

【解析】因为，故可得，则；

，故可得，即；

，即，

也即，等式两边同时除以，

则；

故；

故选：C.

20．已知，，满足，且，，则的值为（    ）

A．－2 B． C． D．2

【答案】B

【分析】根据题意切化弦结合三角恒等变换可得，结合运算求解即可.

【解析】由，即，可得，

则，

可得，

因为，即，

可得，

又因为，即，所以．

故选：B．

**题型4：逆用和、差角的余弦、正弦、正切公式化简，求值**

21．已知函数，则“为奇函数”是“”的（ ）

A．充要条件 B．充分不必要条件

C．必要不充分条件 D．既不充分又不必要条件

【答案】C

【分析】首先根据奇函数的定义，结合两角和差的余弦公式，求，再根据充分，必要条件的定义，即可判断选项.

【解析】若为奇函数，则满足，所以，则有，

则，因为，所以，所以“为奇函数”是“”的必要不充分条件*.*

故选：C

22．（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】借助诱导公式与两角和的正弦公式计算即可得.

【解析】

.

故选：C.

23．已知，，，则，，的大小关系是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】利用两角和的正切公式化简得，由得最小，再利用幂函数与指数函数的单调性比较即可.

【解析】由，

又，所以最小；

由幂函数在单调递增，

所以；

又由指数函数在上单调递增，

所以，故，即；

综上，.

故选：A.

**题型5：两角和与差的三角函数综合解答题**

24．利用两角差的余弦公式，证明下列诱导公式：

(1)；

(2).

【答案】(1)证明过程见解析

(2)证明过程见解析

【分析】（1）利用两角差的余弦公式，结合特殊角的三角函数值进行证明即可；

（2）根据角度的关系，结合两角差的余弦公式、殊角的三角函数值进行证明即可.

【解析】（1）右边左边；

（2）左边右边.

25．求证：

(1)；

(2)．

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】（1）（2）利用余弦函数的和差公式进行加减运算即可得证.

【解析】（1）因为，

，

两式相加，得，

将上式两边同除以2，得．

（2）因为，

，

两式相减，得．

将上式两边同除以，得．

26．求证：

(1)当时，；

(2)当时，．

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】（1）根据正切两角和公式求解即可.

（2）根据正切两角和公式求解即可.

【解析】（1）因为

所以











.

即证：.

（2）因为

所以







.

即证：.



**一、单选题**

1．cos 295°sin 70°－sin 115°cos 110°的值为（    ）

A． B．－

C． D．－

【答案】A

【分析】利用诱导公式以及两角差的余弦公式的逆应用即可求解.

【解析】原式＝－cos 115°cos 20°＋sin 115°sin 20°

＝cos 65°·cos 20°＋sin 65°sin 20°＝cos(65°－20°)＝cos 45°＝.

故选：A

2．，，则的值为（   ）

A． B．

C． D．

【答案】B

【解析】由题意先求出的值，再利用两角差的余弦公式，即可得答案.

【解析】∵且，

∴，

∴．

故选：*B.*

【点睛】本题考查两角差的余弦公式的应用，考查学生对基础知识的掌握程度，属基础题.

3．已知，，且，，则（    ）

A．1 B．0 C．-1 D．

【答案】B

【分析】判断，的范围，求得，，将化为，利用两角差的余弦公式即可求得答案.

【解析】因为，,

所以，,

因为，所以,

因为，所以,

所以



,

故选：B

4．下列等式中恒成立的是（ ）

A．

B．

C．

D．

【答案】D

【分析】根据两角和与差的正、余弦公式即可得答案.

【解析】解：根据两角和与差的正、余弦公式有：

；

；

；

；

故选：D.

5．已知，且，则

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】由，可得：，又，∴，

则.

故选D

6．已知角，且，则（    ）

A．－2 B． C． D．2

【答案】C

【分析】根据已知条件，分别求得和，再由正切的差角公式即可求得结果.

【解析】因为，故可得，则；

，故可得，即；

，即，

也即，等式两边同时除以，

则；

故；

故选：C.

7．已知的最大值为2，最小正周期为，是奇函数，则在区间上的值域为（    ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】由最大值和最小正周期可得和的值，再用三角恒等变换可求的解析式，进而由的奇偶性求得，从而利用余弦函数的单调性得到答案.

【解析】由题意得，，，，∴，则.









，即.

∵是奇函数，∴，，又，∴，

∴，∵，∴，

函数在上单调递减，在单调递增，

∴当，即时，取得最大值，即最大值为，

当，即时，取得最小值，即最小值为，

于是在区间上的值域为.

故选：A.

8．在平面四边形中，，则的值是（    ）

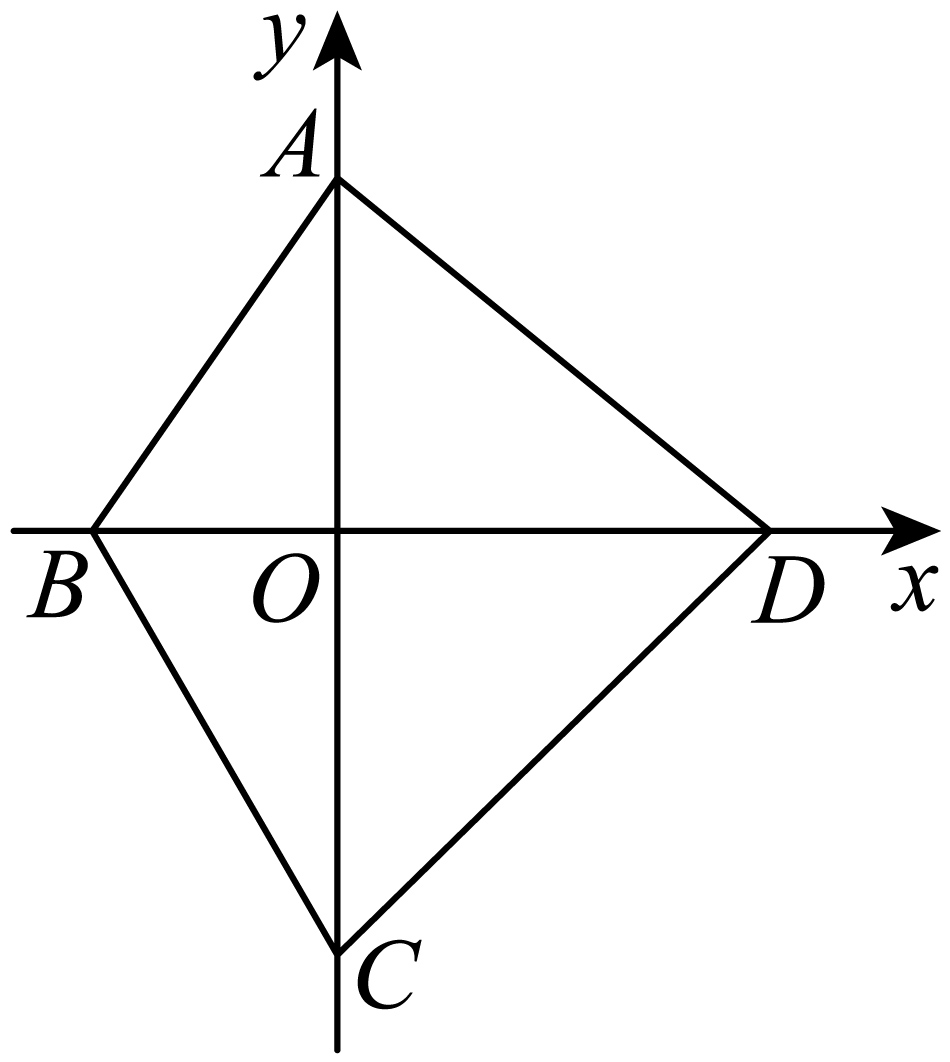
A． B． C． D．

【答案】C

【分析】由题意知，故可建立平面直角坐标系，设出相关线段长，表示出各点坐标，结合可得所设参数的关系，利用解直角三角形求出的值，利用两角和的正切公式，即可求得答案.

【解析】由题意知，则，

故以所在直线为轴，建立平面直角坐标系，



设，则，

故，

由于，故，

即，即，

则在中，，

同理可得，

故，

故选：C

【点睛】方法点睛：由题意向量数量积为0可得四边形对角线垂直，故可建立平面直角坐标系，利用向量运算求出各参数的关系，结合解三角形以及两角和的正切公式即可求解.

**二、多选题**

9．已知，其中为锐角，则（    ）

A． B．

C． D．

【答案】ABD

【分析】由三角函数平方关系可求得、即可判断A项，由及差角公式即可判断B项，由和角、差角公式展开、，两式相加可判断C项，两式相减可得，进而可得即可判断D项.

【解析】因为为锐角，所以，，

所以，，

又因为，所以，

所以，

对于A项，因为，所以，则，故A项正确；

对于B项，，故B项正确；

对于C项，因为，，

两式相加并化简得，故C项错误；

对于D项，由C项知，两式相减并化简得，

所以，故D项正确.

故选：ABD.

10．已知，其中且，则下列结论一定正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】BD

【分析】由题意化简得或，结合且即可判断AB；结合平方关系以及即可判断CD.

【解析】因为，其中且，

所以，

所以或，即或.

因为且，所以，所以，B正确，A错误；

因为，所以，所以，C错误；

因为，所以，D正确.

故选：BD.

11．已知，，，则（    ）

A．

B．

C．

D．

【答案】AB

【分析】利用两角差的正切公式结合合适的代数变形可得正确的选项.

【解析】令，，，

因为，，，

所以，，，

以上三式相加，即有．

令，，，因为

，

，

，

所以，

，

，

以上三式相加，即有．

【解答】AB

12．已知*O*为坐标原点，点，，，，则（    ）

A． B．

C． D．

【答案】ABD

【分析】AB选项，利用向量模长公式计算得到，；C选项，由向量数量积公式得到不一定相等；D选项，由向量数量积运算法则，和差化积公式计算出，D正确.

【解析】A选项，，，

故，A正确；

B选项，，

故



，

，

故



，

由于，故，B正确；

C选项，，

，

因为不一定相等，故不一定相等，C错误；

D选项，由和差化积可得







，

当且仅当时，等号成立，故D正确.

故选：ABD

【点睛】方法点睛：和差化积公式：，

，

，



积化和差公式：，

，

，

.

**三、填空题**

13．已知，，，，则 .

【答案】

【分析】根据同角三角函数的关系可得与，再结合以及同角三角函数的关系可得.

【解析】∵，且，

∴.

∵，∴，∴.

又，∴，

∴



，

又∵，∴.

故答案为：

14．若，，其中，，则的值为 ．

【答案】

【分析】根据，进而利用两角和与差的余弦求得，然后求出.

【解析】因为，所以.

因为，所以.

由已知可得，，

则



.

因为，所以.

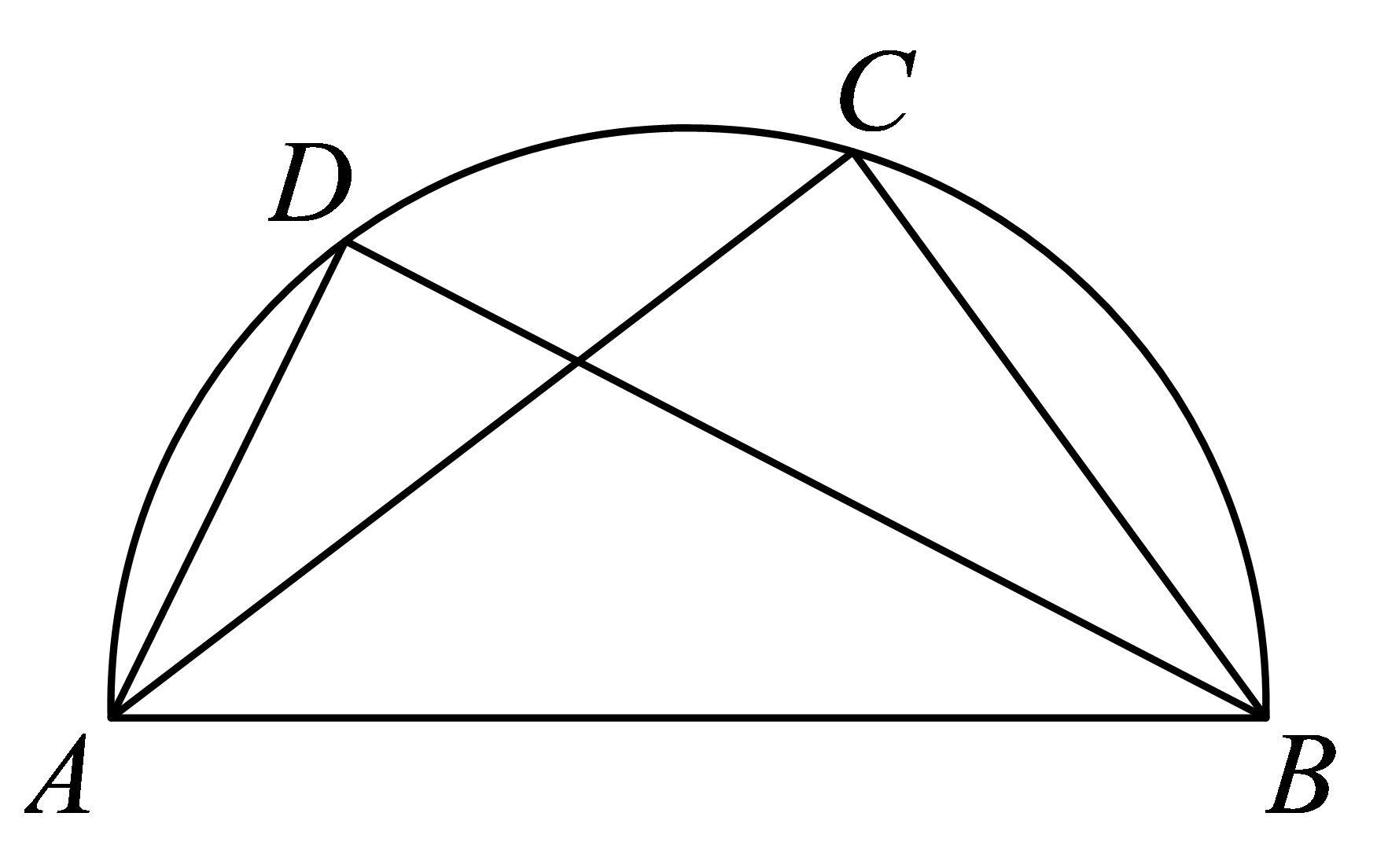
故答案为：

【点睛】方法点睛：三角函数化简求值，常用拼凑角：

（1）再利用诱导公式求值或化简时，巧用相关角的关系会简化解题过程，常见的互余关系有：与，与，与等；常见的互补关系有： 与，与等；

（2）在利用两角和与差的三角函数公式求值或化简时，常根据角与角之间的和差、倍半、互余、互补的关系，运用角的变换，沟通条件与结论的差异，使问题获解，常见角的变换方式有：，，等等.

15．如图，是一半圆的直径，为半圆周上的两个点，且，则的值为 ．



【答案】/0.5

【分析】确定，，再根据和差公式计算得到答案.

【解析】直角三角形中，，，

直角三角形中，，

.

故答案为：.

16．已知的角*A*，*B*，*C*满足，其中符号表示不大于*x*的最大整数，若，则 ．

【答案】1

【分析】先证得，结合条件得必为整数，分为钝角三角形与锐角三角形讨论求得的值

【解析】由，

得.

记，由条件得，

因为，所以必为整数.

如果为钝角三角形，则，则、均为锐角，

从而、为正整数()，

于是，

这时有，矛盾.

于是只能是锐角三角形，则.

又.

若，则，从而不能成立;

若，则，由，得;

若，则，由，得，与矛盾.

所以，即，

所以.

故答案为：1

【点睛】关键点点睛：解题关键是由推得必为整数，再结合求解.

**四、解答题**

17．化简：

(1)；

(2)；

(3)；

(4)；

(5)；

(6).

【答案】(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

【分析】（1）（2）（5）（6）应用诱导公式、两角和差正弦公式化简求值；

（3）（4）应用二倍角正余弦公式化简求值.

【解析】（1）.

（2）由，

∴.

（3）.

（4）.

（5）.

（6）.

18．利用两角和（差）的余弦公式证明：

(1)；

(2).

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】（1）根据余弦的差角公式和诱导公式化简即可证明；

（2）根据正弦的差角公式和诱导公式化简即可证明；

【解析】（1）证明：因为，

,

所以，证毕.

（2）证明：因为，



所以，证毕.

19．证明：

(1)；

(2).

【答案】(1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】利用和角公式及同角三角函数关系式直接化简证明.

【解析】（1）证明：，等式成立；

（2）证明：





20．（1）已知，求的值；

（2）求的值．

【答案】（1） ；（2） ．

【分析】（1）在目标式中，将弦化切求值即可；

（2）由及和角正切公式，即可求值.

【解析】（1）因为，所以；

（2）∵，

∴，

∴．

21．已知，，求的值.

【答案】

【分析】将题干中的两个式子分别平方后求和，结合两角差的正弦公式，即得解

【解析】由题意，，

故



两个式子相加可得：

即

故，

即的值为

22．已知，，，，求证：.

【答案】见解析

【分析】根据，，求出，结合的范围即可得解.

【解析】证明：因为，，

所以，

又，，所以，

所以.

23．证明：.

【答案】见解析

【分析】利用和两角和的正切公式进行求解.

【解析】证明：因为













，

即等式成立.

24．设，，其中，．

（1）求以及的取值范围．

（2）求的值．

【答案】（1），；（2）．

【解析】（1）由，以及不等式知识求出，,再根据，可得，．

（2）根据，利用两角差的余弦公式可求得结果.

【解析】（1），，

，，，

，，

，,

又，，

所以，.

（2）

，

又且，

，

又，，

，

．

【点睛】关键点点睛：将所求角拆成两个已知角进行求解是解题关键.

25．在△ABC中，已知，设∠BAC＝．

（1）求tan的值；

（2）若，(0，)，求cos(﹣)的值．

【答案】（1）；（2）.

【分析】（1）根据平面向量数量积的定义，求出cosα的值，再利用同角的三角函数关系求出tanα的值；

（2）利用三角恒等变换公式计算即可．

【解析】（1）由，得，

所以，又因为，所以．

∴

（2）∵， ∴

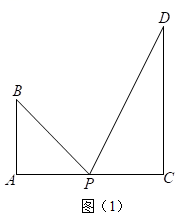
由（1）知：，∴．

【点睛】本题考查了平面向量的数量积与三角函数求值计算问题，是基础题．

26．如图所示是某斜拉式大桥图片，为了了解桥的一些结构情况，学校数学兴趣小组将大桥的结构进行了简化，取其部分可抽象成图（1）所示的模型，其中桥塔、与桥面垂直，通过测量得知，，当为中点时，.

（1）求的长；

（2）试问在线段的何处时，达到最大.



【答案】(1)；（2）时，最大.

【分析】（1）根据题意得到，，求得，列出方程，即可求得；

（2）分别求得，，根据得出关系式，结合换元法和基本不等式，即可求解．

【解析】（1）设，，，则，，

由，解得.

（2）设，则，，

所以，

因为，所以，即为锐角，

令，则，

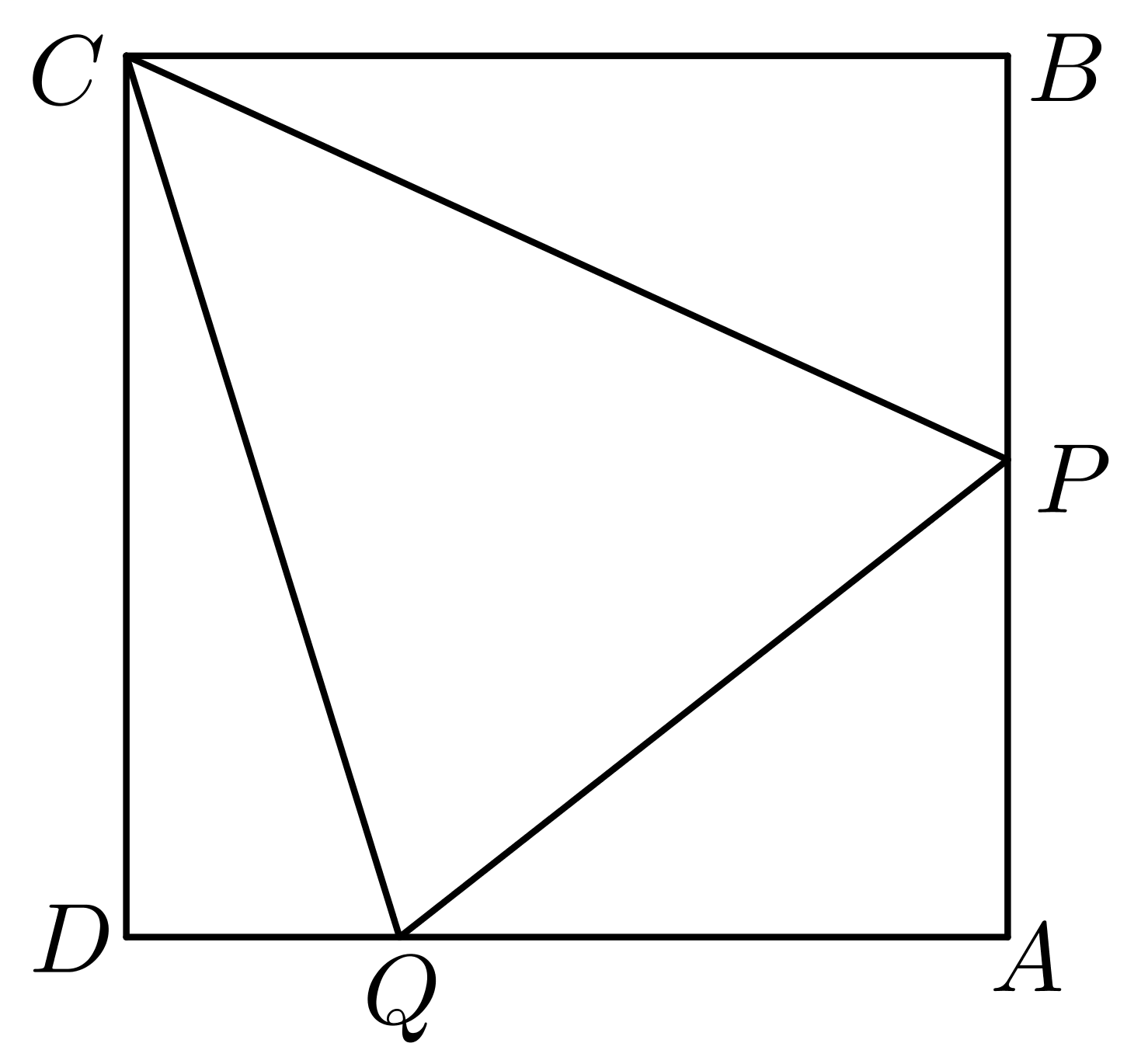
所以，

所以，

当且仅当时，即，

所以时，最大.

27．如图，正方形的边长为1，，分别为边，上的动点*.*



(1)设，，请用含有的式子表示的周长；

(2)若点，在运动的过程中，的大小保持不变，试探究的周长的变化情况*．*

【答案】(1)

(2)的周长为定值2

【分析】（1）求出后即可得解；

（2）由题意可得的大小保持不变，即为定值，结合三角形周长的表达式及两角和的正切公式，得出的表达式，即可求解．

【解析】（1）由题知，，，，

所以的周长*.*

（2）因为点在运动的过程中，的大小保持不变，

所以的大小保持不变，则为定值*.*

，

令，，

则有，化简得，

=，

要使得为定值，则有，解得，

此时， ，即*.*

所以若在运动的过程中，的大小保持不变，

则的周长为定值2*.*