第5部分
立体几何

专题十一　立体几何

编写：王福胜（河北省衡水中学特级教师）

考纲专题解读

考点分布	考点分频	考纲内容	考试指导
1.空间几何体的结构特征、三视图、直观图、表面积和体积	🔥🔥🔥🔥🔥 5年70考	1.空间几何体 (1)认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构. (2)能画出简单空间图形(长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合)的三视图，能识别上述三视图所表示的立体模型，会用斜二测画法画出它们的直观图. (3)会用平行投影与中心投影两种方法画出简单空间图形的三视图与直观图，了解空间图形的不同表示形式. (4)会画某些建筑物的视图与直观图(在不影响图形特征的基础上，尺寸、线条等不作严格要求). (5)了解球、棱柱、棱锥、台的表面积和体积的计算公式. 2.点、直线、平面之间的关系 (1)理解空间直线、平面位置关系的定义，并了解如下可以作为推理依据的公理和定理. 公理1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在此平面内. 公理2：过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面. 公理3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线. 公理4：平行于同一条直线的两条直线互相平行. 定理：空间中如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补. (2)以立体几何的上述定义、公理和定理为出发点，认识和理解空间中线面平行、垂直的有关性质与判定定理. 理解以下判定定理： 如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行. 如果一个平面内的两条相交直线与另一个平面都平行，那么这两个平面平行. 如果一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，那么该直线与此平面垂直. 如果一个平面经过另一个平面的垂线，那么这两个平面互相垂直. 理解以下性质定理，并能够证明： 如果一条直线与一个平面平行，那么经过该直线的任一个平面与此平面的交线和该直线平行. 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线相互平行. 垂直于同一个平面的两条直线平行. 如果两个平面垂直，那么一个平面内垂直于它们交线的直线与另一个平面垂直. (3)能运用公理、定理和已获得的结论证明一些空间图形的位置关系的简单命题.	备考时，（1）应掌握空间几何体的结构特征、三视图、直观图、表面积和体积的概念和公式，熟练画出简单几何体（组合体）的三视图，以及由三视图还原几何体的直观图，求几何体的表面积和体积. (2)掌握空间点、线、面的位置关系的判定定理及其应用，熟练证明直线与平面平行与垂直、平面与平面平行与垂直. (3)加强空间坐标系的建立，能充分利用空间向量求空间角（异面直线夹角，直线与平面夹角以及二面角）、空间距离，以此为背景的探索性问题是近几年高考数学命题新的显著特点，具有较高的新颖性，复习时应加强这类题的训练.
2.空间点、线、面的位置关系	🔥🔥🔥 5年26考		
3.直线、平面平行的判定与性质	🔥🔥🔥🔥 5年30考		
4.直线、平面垂直的判定与性质	🔥🔥🔥🔥🔥 5年37考		

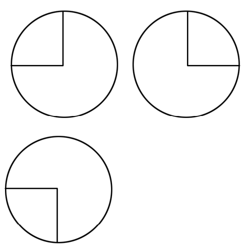
考点题组训练

考点33 空间几何体的结构特征、三视图、直观图、表面积和体积

第1步 试真题

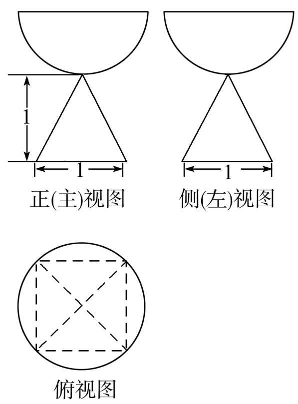
答案 P392

1. (2016·课标Ⅰ,6,易)如图,某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条互相垂直的半径,若该几何体的体积是$\frac{28\pi}{3}$,则它的表面积是 ( )



A. 17π　B. 18π　C. 20π　D. 28π

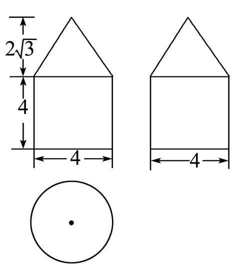
2. (2016·山东,5,易)一个由半球和四棱锥组成的几何体,其三视图如图所示,则该几何体的体积为 ( )



A. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi$　B. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

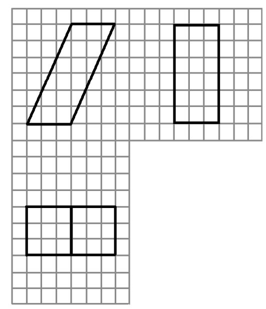
C. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$　D. $1+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

3. (2016·课标Ⅱ,6,中)如图是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图,则该几何体的表面积为 ( )



A. 20π　B. 24π　C. 28π　D. 32π

4. (2016·课标Ⅲ,9,易)如图,网格纸上小正方形的边长为1,粗实线画出的是某多面体的三视图,则该多面体的表面积为 ( )



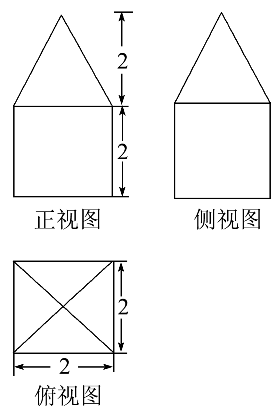
A. $18+36\sqrt{5}$　B. $54+18\sqrt{5}$

C. 90　D. 81

5. (2016·课标Ⅲ,10,中)在封闭的直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$内有一个体积为V的球.若$AB\perp BC$,$AB=6$,$BC=8$,$AA_1=3$,则V的最大值是 ( )

A. 4π　B. $\frac{9\pi}{2}$　C. 6π　D. $\frac{32\pi}{3}$

6. (2015·浙江,2,易)某几何体的三视图如图所示(单位:cm),则该几何体的体积是 ( )

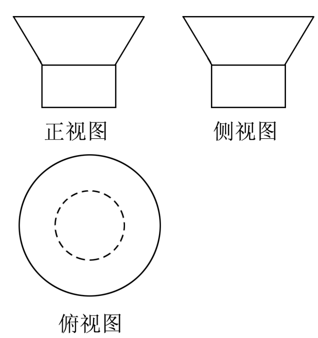


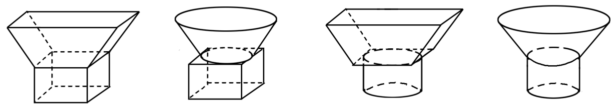
A. 8 cm^3　B. 12 cm^3　C. $\frac{32}{3}$ cm^3　D. $\frac{40}{3}$ cm^3

7. (2014·福建,2,易)某空间几何体的正视图是三角形,则该几何体不可能是 ( )

A. 圆柱　B. 圆锥　C. 四面体　D. 三棱柱

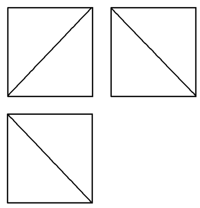
8. (2013·四川,3,易)一个几何体的三视图如图所示,则该几何体的直观图可以是 ( )





A　　　　B　　　　C　　　　D

9.（2015·课标Ⅱ，6，中）一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如图，则截去部分体积与剩余部分体积的比值为（　　）

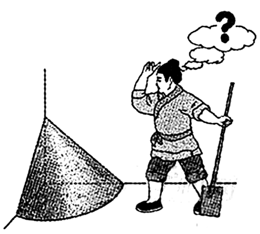


A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{7}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{5}$

10.（2015·课标Ⅱ，9，中）已知 A,B 是球 O 的球面上两点，$\angle AOB=90°$，C 为该球面上的动点．若三棱锥 O-ABC 体积的最大值为 36，则球 O 的表面积为（　　）

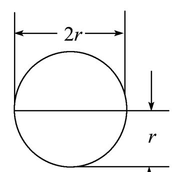
A. 36π　　B. 64π　　C. 144π　　D. 256π

11.（2015·课标Ⅰ，6，中）《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题："今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺．问：积及为米几何？"其意思为："在屋内墙角处堆放米(如图，米堆为一个圆锥的四分之一)，米堆底部的弧长为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？"已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有（　　）

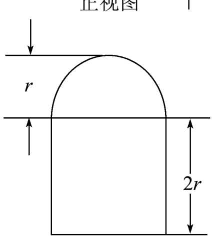


A. 14 斛　　B. 22 斛　　C. 36 斛　　D. 66 斛

12.（2015·课标Ⅰ，11，中）圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为 r)组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示．若该几何体的表面积为 $16+20\pi$，则 $r=$（　　）



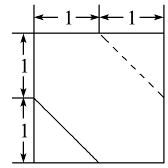
正视图



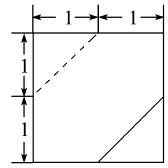
俯视图

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

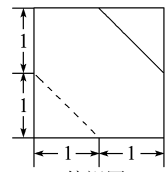
13.（2014·安徽，7，中）一个多面体的三视图如图所示，则该多面体的表面积为（　　）



正(主)视图



侧(左)视图

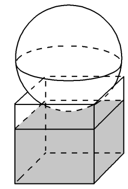


俯视图

A. $21+\sqrt{3}$　　B. $18+\sqrt{3}$

C. 21　　D. 18

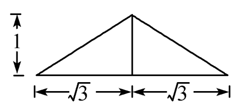
14.（2013·课标Ⅰ，6，中）如图，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高 8 cm，将一个球放在容器口，再向容器内注水，当球面恰好接触水面时测得水深为 6 cm，如果不计容器的厚度，则球的体积为（　　）



A. $\frac{500\pi}{3}$ cm^3　　B. $\frac{866\pi}{3}$ cm^3

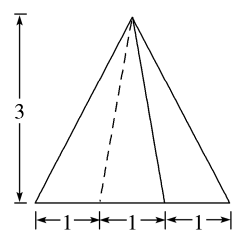
C. $\frac{1\,372\pi}{3}$ cm^3　　D. $\frac{2\,048\pi}{3}$ cm^3

15.（2016·四川，13，易）已知三棱锥的四个面都是腰长为 2 的等腰三角形，该三棱锥的正视图如图所示，则该三棱锥的体积是________．

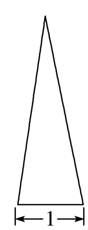


正视图

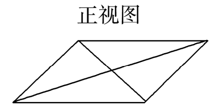
16.（2016·天津，11，易）已知一个四棱锥的底面是平行四边形，该四棱锥的三视图如图所示(单位：m)，则该四棱锥的体积为________m^3．



正视图



侧视图



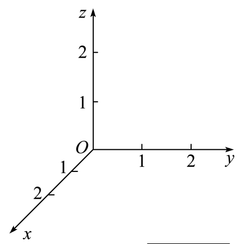
俯视图

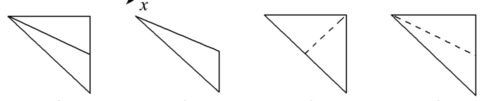
17.（2015·江苏，9，中）现有橡皮泥制作的底面半径为 5、高为 4 的圆锥和底面半径为 2、高为 8 的圆柱各一个．若将它们重新制作成总体积与高均保持不变，但底面半径相同的新的圆锥和圆柱各一个，则新的底面半径为________．

第 2 步 提能力

考向 1 空间几何体的三视图与直观图

考题展示 1 (1)(2014·湖北,5)在如图所示的空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中,一个四面体的顶点坐标分别是(0,0,2),(2,2,0),(1,2,1),(2,2,2).给出编号为①②③④的四个图,则该四面体的正视图和俯视图分别为 ( )

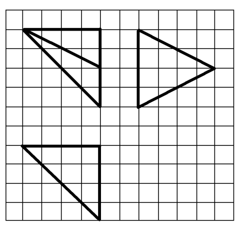




① ② ③ ④

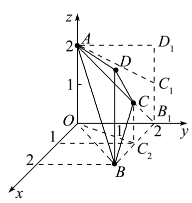
A. ①和② B. ③和① C. ④和③ D. ④和②

(2)(2014·课标Ⅰ,12)如图所示,网络纸上小正方形的边长为 1,粗实线画出的是某多面体的三视图,则该多面体的各条棱中,最长的棱的长度为 ( )

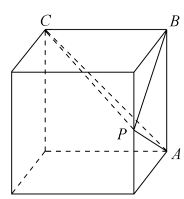


A. $6\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 6 D. 4

【解析】 (1)如图①,$A(0,0,2)$,$B(2,2,0)$,$C(1,2,1)$,$D(2,2,2)$,B,C,D 点在面 yOz 上的射影分别为 B_1,C_1,D_1,它们在一条线上,且 C_1 为 B_1D_1 的中点.从前往后看时,看不到棱 AC,所以正视图中 AC_1 应为虚线;故正视图应为图④.点 A,D,C 在面 xOy 内的射影分别为 O,B,C_2,俯视图为$\triangle OC_2B$,故俯视图应为图②.



图①

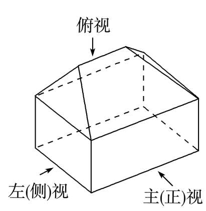


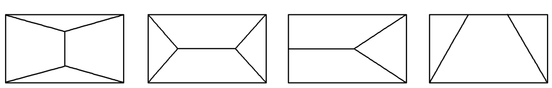
图②

(2)由三视图可知该几何体为图中棱长为 4 的正方体中的三棱锥 $P\text{-}ABC$.由图②可知,最长棱为 $PC=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$.

【答案】 (1)D (2)C

考题强化 (2014·江西,5)一个几何体的直观图如图,下列给出的四个俯视图中正确的是 ( )





A B C D

考情分析

三视图是每年高考的热点,一般以选择题或填空题的形式出现,对三视图的考查,通常有两种题型:一是已知几何体的形状,判断三视图;二是给出几何体的三视图求几何体中的有关数据,其难度有逐渐增大的趋势,重点考查空间想象能力,复习三视图部分时要增大难题的训练和总结.

名师点拨

解(1)时先根据点的坐标画出几何体的直观图,再由直观图来判断正视图和俯视图,注意从正确方向观察,得出正确答案.

解(2)的关键是将三视图还原为直观图,根据三视图的数据特点可以利用正方体来完成直观图,然后利用几何特征求解.

考法提炼 1

由三视图还原直观图的方法

(1)还原后的几何体一般为较熟悉的柱、锥、台、球的组合体.

(2)注意图中实、虚线,实际是原几何体中的可视线与被遮挡线.

(3)想象原形,并画出草图后进行三视图还原,把握三视图和几何体之间的关系,与所给三视图比较,通过调整准确画出原几何体.

考法提炼 2

根据几何体的三视图判断几何体的结构特征

(1)三视图为三个三角形,对应三棱锥;

(2)三视图为两个三角形,一个四边形,对应四棱锥;

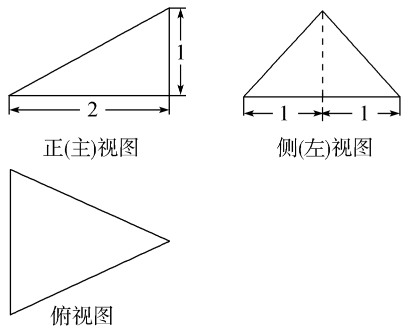
(3)三视图为两个三角形,一个圆,对应圆锥;

(4)三视图为一个三角形,两个四边形,对应三棱柱;

(5)三视图为两个四边形,一个圆,对应圆柱.

考向 2 空间几何体的表面积

考题展示 2 (1)(2015·北京,5)某三棱锥的三视图如图所示,则该三棱锥的表面积是 ( )



正(主)视图　侧(左)视图

俯视图

A. $2+\sqrt{5}$　B. $4+\sqrt{5}$　C. $2+2\sqrt{5}$　D. 5

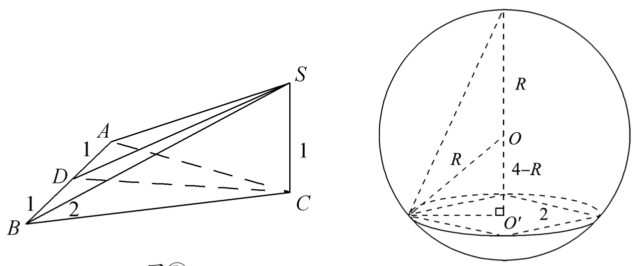
(2)(2014·大纲全国,8)正四棱锥的顶点都在同一球面上.若该棱锥的高为 4,底面边长为 2,则该球的表面积为 ( )

A. $\frac{81\pi}{4}$　B. 16π　C. 9π　D. $\frac{27\pi}{4}$

【解析】 (1)作出三棱锥的示意图如图①,在$\triangle ABC$中,作AB边上的高CD,连接SD.

在三棱锥S-ABC中,$SC\perp$底面ABC,$SC=1$,底面三角形ABC是等腰三角形,$AC=BC$,AB边上的高$CD=2$,$AD=BD=1$,斜高$SD=\sqrt{5}$,$AC=BC=\sqrt{5}$.

$\therefore S_{表}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle SAC}+S_{\triangle SBC}+S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{5}+\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{5}+\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}=2+2\sqrt{5}$.



图①　图②

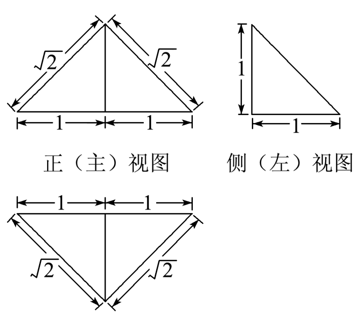
(2)如图②所示,$R^2=(4-R)^2+2$,

$\therefore R^2=16-8R+R^2+2$,$\therefore R=\frac{9}{4}$,

$\therefore S_{表}=4\pi R^2=4\pi\times\frac{81}{16}=\frac{81\pi}{4}$.

【答案】 (1)C　(2)A

考题强化 (2015·安徽,7)一个四面体的三视图如图所示,则该四面体的表面积是 ( )



正(主)视图　侧(左)视图

俯视图

A. $1+\sqrt{3}$　B. $2+\sqrt{3}$　C. $1+2\sqrt{2}$　D. $2\sqrt{2}$

考情分析

高考对空间几何体的表面积的考查,主要借助三视图还原几何体的直观图,确定几何体中的边长,再用表面积公式计算.有时也会考查球、不规则图形(含组合体)的表面积,一般以选择题、填空题的形式出现,难度不大,分值 5 分.

在复习中对于组合体,要弄清它是由哪些简单几何体组成的,要注意"表面"的定义,以确保不重复、不遗漏.

名师点拨

解(1)注意由三视图还原直观图后的边长及三角形的形状.

解(2)由题意画出正确的图形,借助辅助面,求出半径长,再利用球的面积公式求解.

考法提炼

求解空间几何体表面积的方法

(1)已知几何体的三视图求其表面积,一般是先根据三视图判断空间几何体的形状,再根据题目所给数据与几何体的表面积公式,求其表面积.

(2)多面体的表面积是各个面的面积之和,组合体的表面积应注意重合部分的处理.

(3)圆柱、圆锥、圆台的侧面是曲面,计算侧面积时需要将这个曲面展开成平面图形计算,而表面积是侧面积与底面圆的面积之和.

(4)解决关于外接球的问题的关键是抓住外接的特点,即球心到多面体的顶点的距离都等于球的半径,同时要作一圆面起衬托作用.

考向3 空间几何体的体积

考题展示3 (1)(2014·课标Ⅱ文,7)正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为2,侧棱长为$\sqrt{3}$,D为BC中点,则三棱锥 $A\text{-}B_1DC_1$ 的体积为 ( )

A. 3　　B. $\frac{3}{2}$

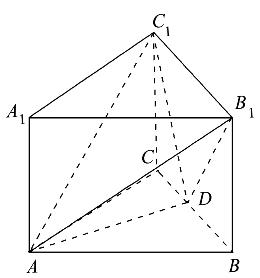
C. 1　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)(2015·山东,7)在梯形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,$AD/\!/BC$,$BC=2AD=2AB=2$.将梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为 ( )

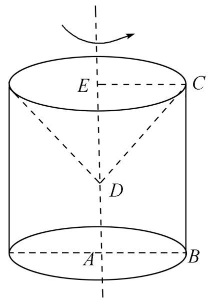
A. $\frac{2\pi}{3}$　B. $\frac{4\pi}{3}$　C. $\frac{5\pi}{3}$　D. 2π

【解析】 (1)如图①,在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$\because AD\perp BC$,

$\therefore AD\perp$平面 B_1DC_1,



图①



图②

$\therefore V_{A\text{-}B_1DC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1DC_1}\cdot AD$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$,故选C.

(2)如图②,过点 C 作 CE 垂直 AD 所在直线于点 E,梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在直线旋转一周而形成的旋转体是由以线段 AB 的长为底面圆半径,线段 BC 为母线的圆柱挖去以线段 CE 的长为底面圆半径,ED 为高的圆锥,如图所示,该几何体的体积为 $V=V_{圆柱}-V_{圆锥}=\pi\cdot AB^2\cdot BC-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot CE^2\cdot DE=\pi\times1^2\times2-\frac{1}{3}\pi\times1^2\times1=\frac{5\pi}{3}$.

【答案】 (1)C　(2)C

考题强化 (2014·江苏,8)设甲、乙两个圆柱的底面积分别为 S_1,S_2,体积分别为 V_1,V_2,若它们的侧面积相等,且$\frac{S_1}{S_2}=\frac{9}{4}$,则$\frac{V_1}{V_2}$的值是________.

考情分析

空间几何体的体积是高考的高频考点,复习时要注重以下两个方面:(1)由三视图求相关几何体的体积;(2)根据几何体的特征,求简单几何体、组合体或旋转体的体积,高考中主要以选择题、填空题形式出现,难度中等,分值5分.

名师点拨

解(1)时根据题意画出图形,根据三棱锥的体积公式求解.

解(2)由题意画出该旋转体的形状,再利用体积公式求解.注意所求几何体的结构特点.

考法提炼

求体积的常用方法

(1)分割求和法:把不规则图形分割成规则图形,然后进行体积计算.

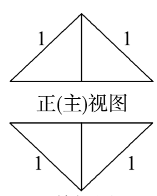
(2)补形法:把不规则几何体补成规则几何体,不熟悉的几何体补成熟悉的几何体,便于计算其体积.

(3)等积法:选择适当的底面图形求几何体的体积,常用于三棱锥的体积.

第3步 过模拟

答案 P393

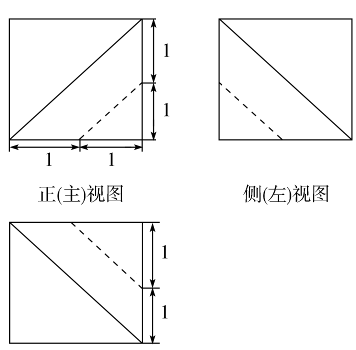
1. (2015·山东淄博模拟,4)把边长为1的正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起,形成的三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的正(主)视图与俯视图如图所示,则其侧(左)视图的面积为 ( )



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{1}{2}$

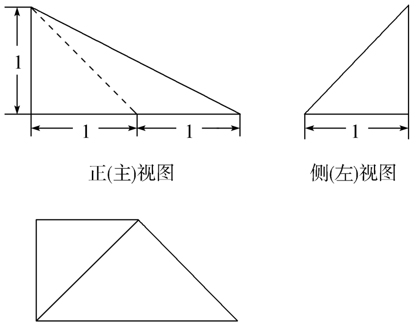
C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　D. $\frac{1}{4}$

2. (2016·吉林长春二模,6)一个几何体的三视图如图所示,则该几何体的体积为 ( )



A. $\frac{16}{3}$　B. $\frac{20}{3}$　C. $\frac{15}{2}$　D. $\frac{13}{2}$

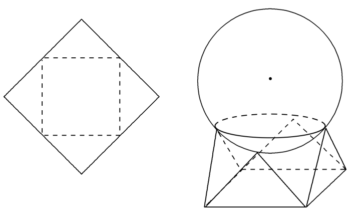
3.(2016·北京房山区一模,5)某四棱锥的三视图如图所示,则最长的一条侧棱的长度为 ( )



正(主)视图　侧(左)视图　俯视图

A. $\sqrt{2}$　B. $\sqrt{3}$　C. $\sqrt{5}$　D. $\sqrt{6}$

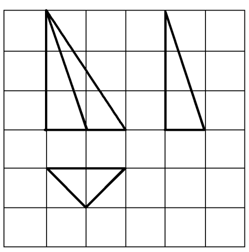
4.(2015·安徽蚌埠一模,7)如图所示,用一边长为$\sqrt{2}$的正方形硬纸,按各边中点垂直折起四个小三角形,做成一个蛋巢,将表面积为4π的鸡蛋(视为球体)放入其中,蛋巢形状保持不变,则鸡蛋中心(球心)与蛋巢底面的距离为 ( )



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$

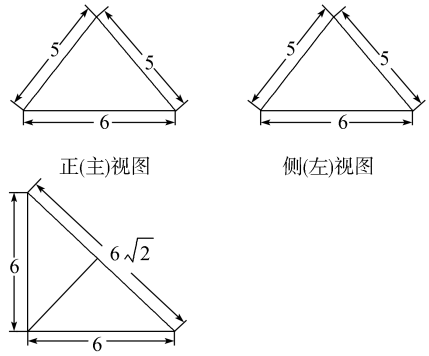
5.(2016·陕西西安一模,9)如图,网格纸中的小正方形的边长均为1,图中粗线画出的是一个几何体的三视图,则这个几何体的表面积为 ( )



A. $\frac{1}{2}(\sqrt{22}+3\sqrt{2}+4)$　B. $\frac{1}{2}(\sqrt{22}+3\sqrt{2}+8)$

C. $\frac{1}{2}(\sqrt{22}+\sqrt{2}+8)$　D. $\frac{1}{2}(\sqrt{22}+2\sqrt{2}+8)$

6.(2016·江西南昌一模,6)一个几何体的三视图及尺寸如图所示,则该几何体的外接球半径为 ( )



正(主)视图　侧(左)视图　俯视图

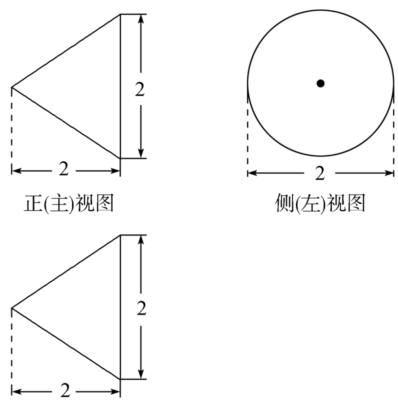
A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{16}$　C. $\frac{\sqrt{17}}{4}$　D. $\frac{17}{4}$

7.(2015·河北石家庄调研,8)已知球O,过其球面上A,B,C三点作截面,若O点到该截面的距离是球半径的一半,且$AB=BC=2$,$\angle B=120°$,则球O的表面积为 ( )

A. $\frac{64\pi}{3}$　B. $\frac{8\pi}{3}$

C. 4π　D. $\frac{16\pi}{9}$

8.(2016·湖南长沙联考,14)已知某几何体的三视图如图所示,根据图中标出的尺寸,可得这个几何体的表面积是________.



正(主)视图　侧(左)视图　俯视图

9.(2015·山东临沂模拟,14)四面体$ABCD$中,共顶点A的三条棱两两相互垂直,且其长分别为2,3,4.若四面体$ABCD$的四个顶点在同一个球面上,则这个球的表面积为________.

考点34 空间点、线、面的位置关系

第1步 试真题

答案 P393

1.(2016·浙江,2,易)已知互相垂直的平面α,β交于直线l,若直线m,n满足$m/\!/\alpha,n\perp\beta$,则 ( )

A. $m/\!/l$　B. $m/\!/n$　C. $n\perp l$　D. $m\perp n$

2.(2016·课标Ⅰ,11,难)平面α过正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点A,$\alpha/\!/$平面CB_1D_1,$\alpha\cap$平面$ABCD=m$,$\alpha\cap$平面$ABB_1A_1=n$,则m,n所成角的正弦值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\frac{1}{3}$

3.(2015·福建,7,易)若l,m是两条不同的直线,m垂直于平面α,则“$l\perp m$”是“$l/\!/\alpha$”的 ( )

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

4.(2013·课标Ⅱ,4,易)已知m,n为异面直线,$m\perp$平面α,$n\perp$

平面 β,直线 l 满足 $l\perp m$,$l\perp n$,$l\not\subset\alpha$,$l\not\subset\beta$,则（　　）

A. $\alpha/\!/\beta$ 且 $l/\!/\alpha$

B. $\alpha\perp\beta$ 且 $l\perp\beta$

C. α 与 β 相交,且交线垂直于 l

D. α 与 β 相交,且交线平行于 l

5.（2012·四川,6,易）下列命题正确的是（　　）

A. 若两条直线和同一个平面所成的角相等,则这两条直线平行

B. 若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等,则这两个平面平行

C. 若一条直线平行于两个相交平面,则这条直线与这两个平面的交线平行

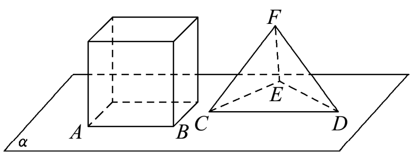
D. 若两个平面都垂直于第三个平面,则这两个平面平行

6.（2012·重庆,9,中）设四面体的六条棱的长分别为 1,1,1,1,$\sqrt{2}$ 和 a,且长为 a 的棱与长为 $\sqrt{2}$ 的棱异面,则 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,\sqrt{2})$　　　　B. $(0,\sqrt{3})$

C. $(1,\sqrt{2})$　　　　D. $(1,\sqrt{3})$

7.（2013·江西,8,中）如图,正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上,且 $AB/\!/CD$,正方体的六个面所在的平面与直线 CE,EF 相交的平面个数分别记为 m,n,那么 $m+n=$（　　）



A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

8.（2016·课标Ⅱ,14,中）α,β 是两个平面,m,n 是两条直线,有下列四个命题:

①如果 $m\perp n$,$m\perp\alpha$,$n/\!/\beta$,那么 $\alpha\perp\beta$.

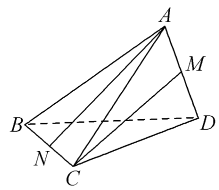
②如果 $m\perp\alpha$,$n/\!/\alpha$,那么 $m\perp n$.

③如果 $\alpha/\!/\beta$,$m\subset\alpha$,那么 $m/\!/\beta$.

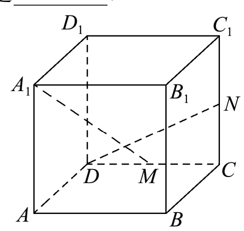
④如果 $m/\!/n$,$\alpha/\!/\beta$,那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.

其中正确的命题有________.（填写所有正确命题的编号）

9.（2015·浙江,13,中）如图,在三棱锥 A-BCD 中,$AB=AC=BD=CD=3$,$AD=BC=2$,点 M,N 分别为 AD,BC 的中点,则异面直线 AN,CM 所成的角的余弦值是________.



10.（2012·四川,14,中）如图,在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,M,N 分别是棱 CD,CC_1 的中点,则异面直线 A_1M 与 DN 所成的角的大小是________.



第 2 步　提能力

考向 1　空间点、线、面位置关系的判断

考题展示 1　(1)（2016·山东济南一模,6）设 m,n 是两条不同的直线,α,β 是两个不同的平面.（　　）

A. 若 $m\perp n$,$n/\!/\alpha$,则 $m\perp\alpha$

B. 若 $m/\!/\beta$,$\beta\perp\alpha$,则 $m\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\beta$,$n\perp\beta$,$n\perp\alpha$,则 $m\perp\alpha$

D. 若 $m\perp n$,$n\perp\beta$,$\beta\perp\alpha$,则 $m\perp\alpha$

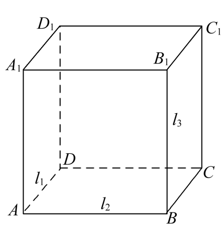
(2)（2014·广东,7）若空间中四条两两不同的直线 l_1,l_2,l_3,l_4,满足 $l_1\perp l_2$,$l_2\perp l_3$,$l_3\perp l_4$,则下列结论一定正确的是（　　）

A. $l_1\perp l_4$　　　　B. $l_1/\!/l_4$

C. l_1 与 l_4 既不垂直也不平行　　D. l_1 与 l_4 的位置关系不确定

【解析】 (1)选项 A,B,D 中,由条件均可推出 $m/\!/\alpha$ 或 m 与 α 相交或 $m\subset\alpha$,而选项 C 由 $m\perp\beta$,$n\perp\beta$ 可得 $m/\!/n$,又 $n\perp\alpha$,所以 $m\perp\alpha$,故选 C.

(2)不妨令 l_1,l_2,l_3 分别为如图所示正方体的边所在直线.若 l_4 为直线 B_1C_1,则有 $l_1/\!/l_4$;若 l_4 为直线 C_1D_1,则 $l_1\perp l_4$;若 l_4 为直线 A_1C_1,则 l_1 与 l_4 异面,故 l_1 与 l_4 的位置关系不确定.



考情分析

高考对点、线、面的位置关系的考查不多,主要有以下两个方面:

(1)单独考查直线和平面位置关系;

(2)以多面体为载体进行考查线、面位置关系,复习时主要以理解和掌握定理为主,试题难度中等,常以选择题形式出现.

名师点拨

对(1)主要应用直线与平面的位置关系的定理判断、推理命题是否正确.

对(2)可建立几何模型构造正方体,直观体现其位置关系,同学们应加强这方面的训练.

考法提炼 1

三个公理的作用

公理 1 证明“点在面内”或“线在面内”;公理 2 证明“两个平面重合”,用来确定一个平面或证明“点线共面”;公理 3 证明“三点共线”“三线共点”,确定两平面的交线.

【答案】 (1)C (2)D

考题强化 (2014·辽宁,4)已知 m,n 表示两条不同直线,α 表示平面. 下列说法正确的是 ( )

A. 若 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$,则 $m/\!/n$

B. 若 $m\perp\alpha,n\subset\alpha$,则 $m\perp n$

C. 若 $m\perp\alpha,m\perp n$,则 $n/\!/\alpha$

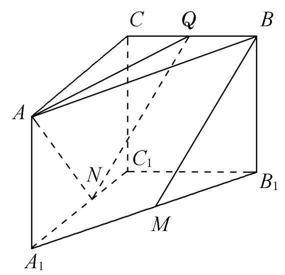
D. 若 $m/\!/\alpha,m\perp n$,则 $n\perp\alpha$

考向2 异面直线所成的角

考题展示2 (2014·课标Ⅱ,11)直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle BCA=90°$,M,N 分别是 A_1B_1,A_1C_1 的中点,$BC=CA=CC_1$,则 BM 与 AN 所成角的余弦值为 ( )

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 方法一(几何法):如图,取 BC 的中点 Q,连接 QN,AQ,



易知 $BM/\!/QN$,则 $\angle ANQ$ 即为所求,

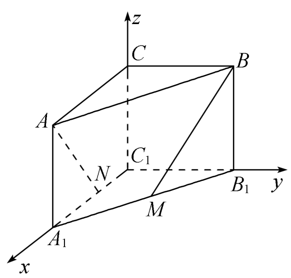
设 $BC=CA=CC_1=2$,

则 $AQ=\sqrt{5}$,$AN=\sqrt{5}$,$QN=\sqrt{6}$,

$\therefore \cos\angle ANQ=\frac{AN^2+QN^2-AQ^2}{2AN\cdot QN}$

$=\frac{5+6-5}{2\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\frac{6}{2\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

方法二(向量法):以 C_1 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $C_1\text{-}xyz$,



设 $BC=CA=CC_1=2$,则 $A(2,0,2)$,$N(1,0,0)$,$M(1,1,0)$,$B(0,2,2)$,

$\therefore \overrightarrow{AN}=(-1,0,-2)$,$\overrightarrow{BM}=(1,-1,-2)$,

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BM}\rangle=\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{AN}||\overrightarrow{BM}|}=\frac{-1+4}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

【答案】 C

考题强化 (2014·大纲全国,11)已知二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 为 $60°$,$AB\subset\alpha$,$AB\perp l$,A 为垂足,$CD\subset\beta$,$C\in l$,$\angle ACD=135°$,则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 ( )

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

考法提炼2

点、线、面的位置关系的判断方法

(1)平面的基本性质是立体几何的基本理论基础,也是判断线面关系的基础. 对点、线、面的位置关系的判断,常采用穷举法,即对各种关系都进行考虑,要充分发挥模型的直观性作用.

(2)利用线线平行、线面平行、面面平行以及线线垂直、线面垂直、面面垂直的判定定理、性质定理综合进行推理和判断命题是否正确.

考情分析

高考对异面直线所成角的求解近几年逐渐淡化,主要考查能作出异面直线夹角的情况,借助常见几何体转化为同一平面内两条直线的夹角,其难度降低,能建立空间直角坐标系的,可利用空间向量求异面直线的夹角.

名师点拨

本题采用两种方法,方法一思维量大,需要利用平移把异面直线所成角转化成相交直线的夹角,利用余弦定理求解;方法二利用空间向量求解相对来讲简单一些,但建立合适的坐标系是关键,计算要准确.

考法提炼

求异面直线所成角的方法

(1)几何法

①作:利用定义转化为平面角,对于异面直线所成的角,可固定一条,平移一条,或两条同时平移到某个特殊的位置,顶点选在特殊的位置上.

②证:证明作出的角为所求角.

③求:把这个平面角置于一个三角形中,通过解三角形求空间角.

(2)向量法

建立空间直角坐标系,利用公式 $|\cos\theta|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|$ 求出异面直线的方向向量的夹角. 若向量夹角是锐角或直角,则该角即为异面直线所成角;若向量夹角是钝角,则异面直线所成的角为该角的补角.

注意:两异面直线所成的角归结到一个三角形的内角时,容易忽视这个三角形的内角可能等于两异面直线所成的角,也可能等于其补角.

第3步 过模拟

答案 P394

1. (2015·江西赣州四校联考,2)若平面 $\alpha/\!/$平面 β,点 $A,C\in\alpha$,$B,D\in\beta$,则直线 $AC/\!/$直线 BD 的充要条件是 ( )

A. $AB/\!/CD$ B. $AD/\!/CB$

C. AB 与 CD 相交 D. A,B,C,D 四点共面

2. (2016·浙江温州十校联考,4)关于直线 a,b,l 及平面 α,β,下列命题中正确的是 ( )

A. 若 $a/\!/\alpha,b/\!/\alpha$,则 $a/\!/b$

B. 若 $a/\!/\alpha,b\perp a$,则 $b\perp\alpha$

C. 若 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且 $l\perp a$，$l\perp b$，则 $l\perp\alpha$

D. 若 $a\perp\alpha$，$a/\!/\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

3. (2015·山东莱芜二模，4)设 m，n 是空间两条直线，α，β 是空间两个平面，则下列命题中不正确的是 ( )

A. 当 $n\perp\alpha$ 时，"$n\perp\beta$"是"$\alpha/\!/\beta$"的充要条件

B. 当 $m\subset\alpha$ 时，"$m\perp\beta$"是"$\alpha\perp\beta$"的充分不必要条件

C. 当 $m\subset\alpha$ 时，"$n/\!/\alpha$"是"$m/\!/n$"的必要不充分条件

D. 当 $m\subset\alpha$ 时，"$n\perp\alpha$"是"$m\perp n$"的充分不必要条件

4. (2016·浙江十二校联考，5)已知 a，b，c 为三条不同的直线，α，β 是空间两个平面，且 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=c$. 给出下列命题：

①若 a 与 b 是异面直线，则 c 至少与 a，b 中的一条相交；

②若 a 不垂直于 c，则 a 与 b 一定不垂直；

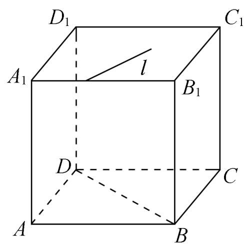
③若 $a/\!/b$，则必有 $a/\!/c$；

④若 $a\perp b$，$a\perp c$，则必有 $\alpha\perp\beta$.

其中正确命题的个数是 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. (2016·江西南昌一模，5)已知在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中(如图)，$l\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，且 l 与 B_1C_1 不平行，则下列一定不可能的是 ( )



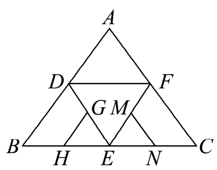
A. l 与 AD 平行

B. l 与 AB 异面

C. l 与 CD 所成角为 30°

D. l 与 BD 垂直

6. (2015·山东枣庄模拟，6)如图是正四面体的平面展开图，G，H，M，N 分别为 DE，BE，EF，EC 的中点，在这个正四面体中，



①GH 与 EF 平行；

②BD 与 MN 为异面直线；

③GH 与 MN 成 60°角；

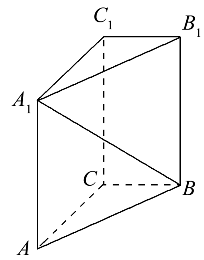
④DE 与 MN 垂直.

以上四个命题中，正确命题的序号是 ( )

A. ②③　　B. ③④

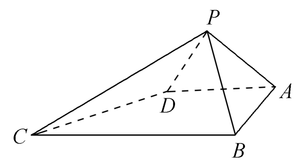
C. ②③④　　D. ①③④

7. (2015·上海模拟，13)如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AA_1=2$，$AC=BC=1$，则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值是________.



8. (2015·山东临沂二模，13)在三棱锥 $S\text{-}ACB$ 中，$\angle SAB=\angle SAC=\angle ACB=90^\circ$，$AC=2$，$BC=\sqrt{13}$，$SB=\sqrt{29}$，则 SC 与 AB 所成角的余弦值为________.

9. (2016·辽宁三校协作体一模，14)如图所示，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，$BC=2AD$，$\triangle PAB$ 和 $\triangle PAD$ 都是等边三角形，则异面直线 CD 与 PB 所成角的大小为________.



考点35 直线、平面平行的判定与性质

第1步 试真题

答案 P395

1. (2015·北京，4，易)设 α，β 是两个不同的平面，m 是直线且 $m\subset\alpha$. "$m/\!/\beta$"是"$\alpha/\!/\beta$"的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. (2015·安徽，5，易)已知 m，n 是两条不同直线，α，β 是两个不同平面，则下列命题正确的是 ( )

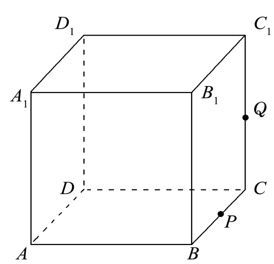
A. 若 α，β 垂直于同一平面，则 α 与 β 平行

B. 若 m，n 平行于同一平面，则 m 与 n 平行

C. 若 α，β 不平行，则在 α 内不存在与 β 平行的直线

D. 若 m，n 不平行，则 m 与 n 不可能垂直于同一平面

3. (2013·安徽，15，中)如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P 为 BC 的中点，Q 为线段 CC_1 上的动点，过点 A，P，Q 的平面截该正方体所得的截面记为 S. 则下列命题正确的是________(写出所有正确命题的编号).



①当 $0<CQ<\frac{1}{2}$ 时，S 为四边形；

②当 $CQ=\frac{1}{2}$ 时，S 为等腰梯形；

③当 $CQ=\frac{3}{4}$ 时，S 与 C_1D_1 的交点 R 满足 $C_1R=\frac{1}{3}$；

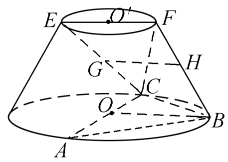
④当 $\frac{3}{4}<CQ<1$ 时，S 为六边形；

⑤当 $CQ=1$ 时，S 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4. (2016·山东,17,12分,中)在如图所示的圆台中,AC是下底面圆O的直径,EF是上底面圆O'的直径,FB是圆台的一条母线.

(1)已知G,H分别为EC,FB的中点,求证:GH∥平面ABC;

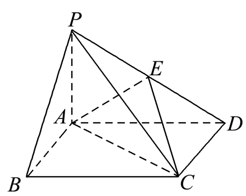
(2)已知$EF=FB=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$,$AB=BC$.求二面角$F$-$BC$-$A$的余弦值.



5. (2014·课标Ⅱ,18,12分,中)如图,四棱锥P-$ABCD$中,底面$ABCD$为矩形,$PA\perp$平面$ABCD$,E为PD的中点.

(1)证明:PB∥平面AEC;

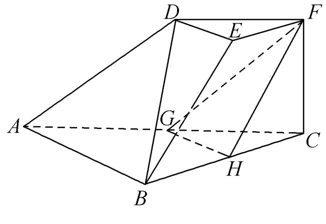
(2)设二面角D-AE-C为$60°$,$AP=1$,$AD=\sqrt{3}$,求三棱锥E-ACD的体积.



6. (2015·山东,17,12分,中)如图,在三棱台DEF-ABC中,$AB=2DE$,G,H分别为AC,BC的中点.

(1)求证:BD∥平面FGH;

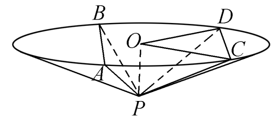
(2)若$CF\perp$平面ABC,$AB\perp BC$,$CF=DE$,$\angle BAC=45°$,求平面FGH与平面$ACFD$所成的角(锐角)的大小.



7. (2013·安徽,19,13分,中)如图,圆锥顶点为P,底面圆心为O,其母线与底面所成的角为$22.5°$,AB和CD是底面圆O上的两条平行的弦,轴OP与平面PCD所成的角为$60°$.

(1)证明:平面PAB与平面PCD的交线平行于底面;

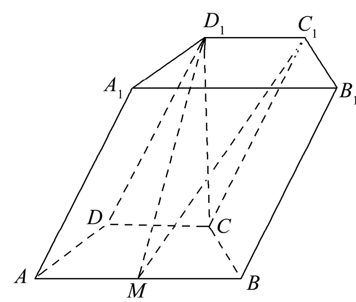
(2)求$\cos\angle COD$.



8. (2014·山东,17,12分,中)如图,在四棱柱$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中,底面$ABCD$是等腰梯形,$\angle DAB=60°$,$AB=2CD=2$,M是线段AB的中点.

(1)求证:C_1M∥平面A_1ADD_1;

(2)若CD_1垂直于平面$ABCD$且$CD_1=\sqrt{3}$,求平面C_1D_1M和平面$ABCD$所成的角(锐角)的余弦值.



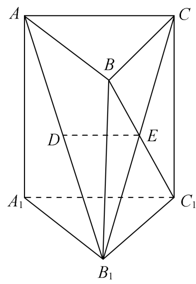
第 2 步 提能力

考向 1 线面平行的判定与性质

考题展示 1 (2015·江苏,16,14 分)如图,在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,已知 $AC\perp BC$,$BC=CC_1$.设 AB_1 的中点为 D,$B_1C\cap BC_1=E$.

求证:(1)DE//平面 AA_1C_1C;

(2)$BC_1\perp AB_1$.



【证明】 (1)由题意知,E 为 B_1C 的中点,又 D 为 AB_1 的中点,

所以 DE//AC.

又因为 $DE\not\subset$平面 AA_1C_1C,$AC\subset$平面 AA_1C_1C,

所以 DE//平面 AA_1C_1C.

(2)因为棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,

所以 $CC_1\perp$平面 ABC.

因为 $AC\subset$平面 ABC,所以 $AC\perp CC_1$.

又因为 $AC\perp BC$,$CC_1\subset$平面 BCC_1B_1,$BC\subset$平面 BCC_1B_1,$BC\cap CC_1=C$,

所以 $AC\perp$平面 BCC_1B_1.

又因为 $BC_1\subset$平面 BCC_1B_1,所以 $BC_1\perp AC$.

因为 $BC=CC_1$,所以矩形 BCC_1B_1 是正方形,

所以 $BC_1\perp B_1C$.

因为 AC,$B_1C\subset$平面 B_1AC,$AC\cap B_1C=C$,

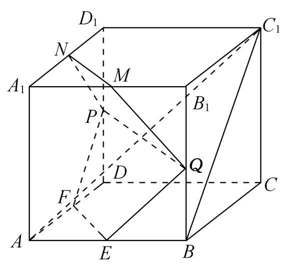
所以 $BC_1\perp$平面 B_1AC.

又因为 $AB_1\subset$平面 B_1AC,所以 $BC_1\perp AB_1$.

考题强化 (2014·湖北文,20,13 分)如图,在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F,P,Q,M,N 分别是棱 AB,AD,DD_1,BB_1,A_1B_1,A_1D_1 的中点.

求证:(1)直线 BC_1//平面 $EFPQ$;

(2)直线 $AC_1\perp$平面 $PQMN$.



考情分析

高考对线面平行的判定与性质的考查形式有两种:第一种,直线与平面平行的判定;第二种,利用直线与平面平行去证明一些空间图形的平行关系的简单命题.主要以解答题的形式考查命题类的判定,若出现在解答题,一般出现在第一问中.

名师点拨

(1)根据中位线定理得 DE//AC,即证 DE//平面 AA_1C_1C;

(2)先由直三棱柱得出 $CC_1\perp$平面 ABC,得 $AC\perp CC_1$;再证明 $AC\perp$平面 BCC_1B_1,得 $BC_1\perp AC$;最后证明 $BC_1\perp$平面 B_1AC,进而得出 $BC_1\perp AB_1$.

考法提炼 1

证明线面平行问题的思路(一)

(1)作(找)出所证线面平行中的平面内的一条直线;

(2)证明线线平行;

(3)根据线面平行的判定定理证明线面平行.

考法提炼 2

证明线面平行问题的思路(二)

(1)在多面体中作出要证线面平行中的线所在的平面;

(2)利用线面平行的判定定理证明所作平面内的两条相交直线分别与所证平面平行;

(3)证明所作平面与所证平面平行;

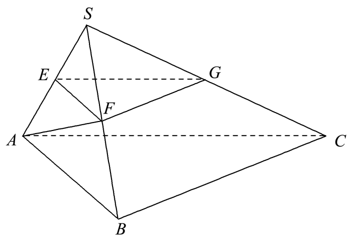
(4)转化为线面平行.

考向 2 平面与平面平行的判定与性质

考题展示 2 (2013·江苏,16,14 分)如图,在三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中,平面 $SAB\perp$平面SBC,$AB\perp BC$,$AS=AB$.过 A 作 $AF\perp SB$,垂足为 F,点 E,G 分别是棱 SA,SC 的中点.

考情分析

高考对面面平行的判定与性质的考查以解答题第一问为主,主要是利用判定定理或由面面平行推出其他的平行关系,其难度中等,重点考查条件的寻求和问题的转化能力.



求证:(1)平面 EFG//平面 ABC;

(2)$BC\perp SA$.

【证明】 (1)因为 $AS=AB$,$AF\perp SB$,垂足为 F,所以 F 是 SB 的中点.又因为 E 是 SA 的中点,所以 EF//AB.

因为 $EF\not\subset$平面 ABC,$AB\subset$平面 ABC,

所以 EF//平面 ABC.

同理 EG//平面 ABC.又 $EF\cap EG=E$,

所以平面 EFG//平面 ABC.

(2)因为平面 $SAB\perp$平面 SBC,且交线为 SB,

又 $AF\subset$平面 SAB,$AF\perp SB$,

所以 $AF\perp$平面 SBC.

因为 $BC\subset$平面 SBC,

所以 $AF\perp BC$.

又因为 $AB\perp BC$,$AF\cap AB=A$,$AF,AB\subset$平面 SAB,

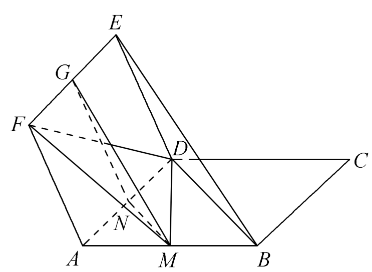
所以 $BC\perp$平面 SAB.

因为 $SA\subset$平面 SAB,所以 $BC\perp SA$.

考题强化 (2016·河南洛阳一模,17,13 分)如图,四边形 $ABCD$ 与 $ADEF$ 均为平行四边形,M,N,G 分别是 AB,AD,EF 的中点.

求证:(1)BE//平面 DMF;

(2)平面 BDE//平面 MNG.



名师点拨

(1)根据等腰三角形的“三线合一”,证出 F 为 SB 的中点,从而得 EG//AC,EF//AB,根据面面平行的判定定理可证平面 EFG//平面 ABC;

(2)由平面 $SAB\perp$平面 SBC,可知 $AF\perp$平面 SBC,因此 $AF\perp BC$,再根据已知条件得出 $BC\perp$平面 SAB,从而证出 $BC\perp SA$.

考法提炼 1

判定面面平行的四个方法

(1)利用定义:即判断两个平面没有公共点.

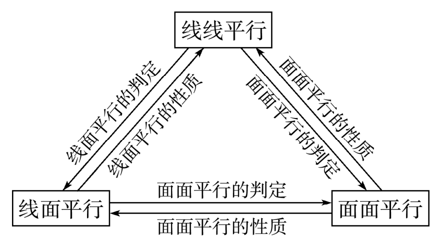
(2)利用面面平行的判定定理.

(3)利用垂直于同一条直线的两平面平行.

(4)利用平面平行的传递性,即两个平面同时平行于第三个平面,则这两个平面平行.

考法提炼 2

平行问题的转化关系



第 3 步 过模拟

答案 P397

1. (2016·广东深圳调研,5)已知直线 l,平面 α,β,γ,则下列能推出 α//β 的条件是 ( )

A. $l\perp\alpha,l$//β　　B. l//α,l//β

C. $\alpha\perp\gamma,\gamma\perp\beta$　　D. α//γ,γ//β

2. (2016·东北三校联考,4)设 l,m 是两条不同的直线,α 是一个平面,则下列说法正确的是 ( )

A. 若 $l\perp m,m\subset\alpha$,则 $l\perp\alpha$　　B. 若 $l\perp\alpha,l$//m,则 $m\perp\alpha$

C. 若 l//$\alpha,m\subset\alpha$,则 l//m　　D. 若 l//α,m//α,则 l//m

3. (2015·山东潍坊模拟,4)有下列命题:

①若直线 l 平行于平面 α 内的无数条直线,则直线 l//α;

②若直线 a 在平面 α 外,则 a//α;

③若直线 a//b,b//α,则 a//α;

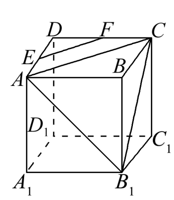
④若直线 a//b,b//α,则 a 平行于平面 α 内的无数条直线.

其中真命题的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. (2016·湖南十三校联考,14)过三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的任意两条棱的中点作直线,其中与平面 ABB_1A_1 平行的直线共有________条.

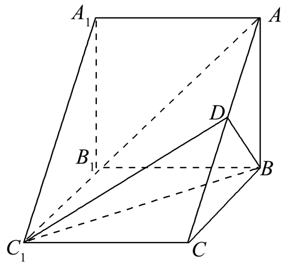
5. (2015·河南洛阳质检,13)如图,正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=2$,点 E 为 AD 的中点,点 F 在 CD 上.若 EF//平面 AB_1C,则线段 EF 的长度等于________.



6. (2015·湖南长沙模拟,18,12 分)如图所示,在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,侧棱 $AA_1\perp$底面 ABC,$AB\perp BC$,D 为 AC 的中点,$AA_1=AB=2$.

(1)求证:AB_1//平面 BC_1D;

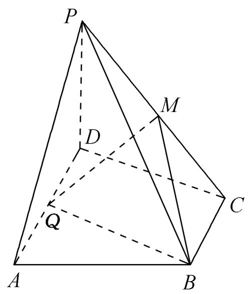
(2)若 $BC=3$,求三棱锥 $D\text{-}BC_1C$ 的体积.



7.(2016·河南郑州一模,18,12 分)如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为直角梯形,$AD\parallel BC$,$PD\perp$底面 $ABCD$,$\angle ADC=90°$,$AD=2BC$,Q 为 AD 的中点,M 为棱 PC 的中点.

(1)证明:$PA\parallel$平面 BMQ;

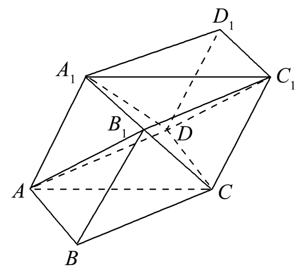
(2)已知 $PD=DC=AD=2$,求点 P 到平面 BMQ 的距离.



8.(2015·河北石家庄模拟,18,12 分)如图,棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为菱形,平面 $AA_1C_1C\perp$平面 $ABCD$.

(1)证明:平面 $AB_1C\parallel$平面 DA_1C_1;

(2)在直线 CC_1 上是否存在点 P,使 $BP\parallel$平面 DA_1C_1?若存在,求出点 P 的位置;若不存在,说明理由.

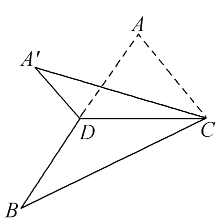


考点36 直线、平面垂直的判定与性质

第1步 试真题

答案 P397

1.(2015·浙江,8,难)如图,已知$\triangle ABC$,D 是 AB 的中点,沿直线 CD 将$\triangle ACD$ 翻折成$\triangle A'CD$,所成二面角 $A'\text{-}CD\text{-}B$ 的平面角为 α,则 ( )



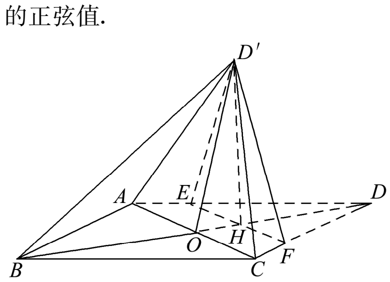
A. $\angle A'DB\leqslant\alpha$　　B. $\angle A'DB\geqslant\alpha$

C. $\angle A'CB\leqslant\alpha$　　D. $\angle A'CB\geqslant\alpha$

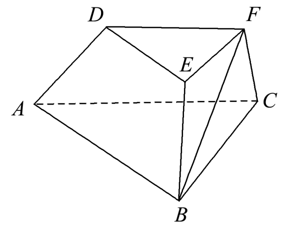
2.(2016·课标Ⅱ,19,12 分,中)如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O,$AB=5$,$AC=6$,点 E,F 分别在 AD,CD 上,$AE=CF=\frac{5}{4}$,EF 交 BD 于点 H.将$\triangle DEF$ 沿 EF 折到$\triangle D'EF$ 的位置,$OD'=\sqrt{10}$.

(1)证明:$D'H\perp$平面 $ABCD$;

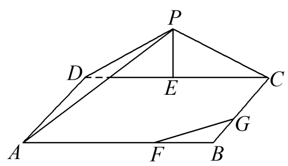
(2)求二面角 $B\text{-}D'A\text{-}C$ 的正弦值.



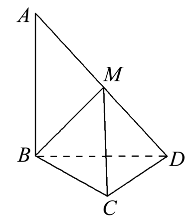
3. (2016·浙江,17,15分,中)如图,在三棱台 ABC-DEF 中,平面 $BCFE\perp$ 平面 ABC,$\angle ACB=90°$,$BE=EF=FC=1$,$BC=2$,$AC=3$.
(1)求证:$BF\perp$ 平面 $ACFD$;
(2)求二面角 B-AD-F 的平面角的余弦值.



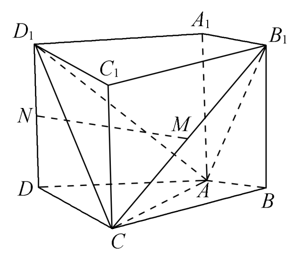
4. (2015·广东,18,14分,中)如图,三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直,$PD=PC=4$,$AB=6$,$BC=3$.点 E 是 CD 边的中点,点 F,G 分别在线段 AB,BC 上,且 $AF=2FB$,$CG=2GB$.
(1)证明:$PE\perp FG$;
(2)求二面角 P-AD-C 的正切值;
(3)求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.



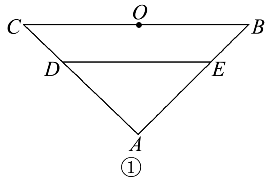
5. (2014·福建,17,13分,中)在平面四边形 $ABCD$ 中,$AB=BD=CD=1$,$AB\perp BD$,$CD\perp BD$.将△ABD 沿 BD 折起,使得平面 $ABD\perp$ 平面 BCD,如图.
(1)求证:$AB\perp CD$;
(2)若 M 为 AD 中点,求直线 AD 与平面 MBC 所成角的正弦值.



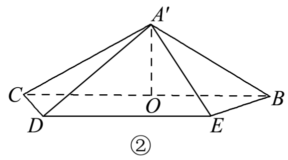
6. (2015·天津,17,13分,中)如图,在四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,侧棱 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$,$AB\perp AC$,$AB=1$,$AC=AA_1=2$,$AD=CD=\sqrt{5}$,且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点.
(1)求证:MN∥平面 $ABCD$;
(2)求二面角 D_1-AC-B_1 的正弦值;
(3)设 E 为棱 A_1B_1 上的点.若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$,求线段 A_1E 的长.



7. (2013·广东,18,12分,中)如图①,在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle A=90°$,$BC=6$,D,E 分别是 AC,AB 上的点,$CD=BE=\sqrt{2}$,O 为 BC 的中点.将△ADE 沿 DE 折起,得到如图②所示的四棱锥 A'-$BCDE$,其中 $A'O=\sqrt{3}$.



①



②

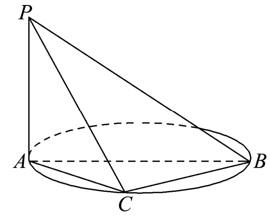
(1)证明:$A'O\perp$平面 $BCDE$;

(2)求二面角 A'-CD-B 的平面角的余弦值.

8. (2013·辽宁,18,12分,中)如图,AB 是圆的直径,PA 垂直圆所在的平面,C 是圆上的点.

(1)求证:平面 $PAC\perp$平面 PBC;

(2)若 $AB=2$,$AC=1$,$PA=1$,求二面角 C-PB-A 的余弦值.



第 2 步 提能力

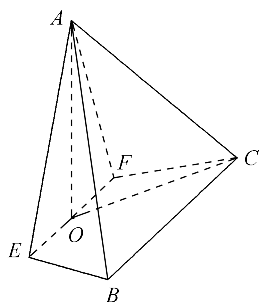
考向 1 线面垂直的判定与性质

考题展示 1 (2015·北京,17,14分)如图,在四棱锥 A-$EFCB$ 中,△AEF 为等边三角形,平面 $AEF\perp$平面 $EFCB$,$EF/\!/BC$,$BC=4$,$EF=2a$,$\angle EBC=\angle FCB=60°$,$O$ 为 EF 的中点.

(1)求证:$AO\perp BE$;

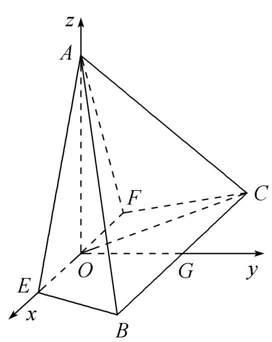
(2)求二面角 F-AE-B 的余弦值;

(3)若 $BE\perp$平面 AOC,求 a 的值.



【解析】 (1)证明:因为△AEF 为等边三角形,O 为 EF 的中点,所以 $AO\perp EF$.又因为平面 $AEF\perp$平面 $EFCB$,$AO\subset$平面 AEF,所以 $AO\perp$平面 $EFCB$.所以 $AO\perp BE$.

(2)如图,取 BC 中点 G,连接 OG.由题设知四边形 $EFCB$ 是等腰梯形,所以 $OG\perp EF$.



由(1)知 $AO\perp$平面 $EFCB$.

又 $OG\subset$平面 $EFCB$.

所以 $OA\perp OG$.

如图建立空间直角坐标系 O-xyz,则 $E(a,0,0)$,$A(0,0,\sqrt{3}a)$,$B(2,\sqrt{3}(2-a),0)$,$\overrightarrow{EA}=(-a,0,\sqrt{3}a)$,$\overrightarrow{BE}=(a-2,\sqrt{3}(a-2),0)$.

设平面 AEB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-ax+\sqrt{3}az=0,\\ (a-2)x+\sqrt{3}(a-2)y=0.\end{cases}$

令 $z=1$,则 $x=\sqrt{3}$,$y=-1$.于是 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$.

又平面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{p}=(0,1,0)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{p}|}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

考情分析

线面垂直的证明是高考中的热点问题,考题形式主要有:①直线与平面垂直的判定与证明;②利用直线与平面垂直的性质证明线线垂直或面面垂直.此类题常以解答题形式呈现,难度适中.

名师点拨

(1)通过证明线面垂直,即 $AO\perp$平面 $EFCB$ 来证明 $AO\perp BE$.

(2)利用空间向量求二面角,通过平面 AEF 和平面 AEB 的法向量求夹角,要注意判断二面角为锐角或钝角,否则,产生错误.

(3)利用线面垂直,向量的数量积为 0 求参数 a 的值.

考法提炼 1

证明直线与平面垂直的具体步骤

(1)找与作:在已知平面内找或作两条相交直线与;

由题知二面角 F-AE-B 为钝角,所以它的余弦值为$-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3)因为 $BE\perp$平面 AOC,所以 $BE\perp OC$,即$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}=0$.

因为$\overrightarrow{BE}=(a-2,\sqrt{3}(a-2),0)$,$\overrightarrow{OC}=(-2,\sqrt{3}(2-a),0)$.

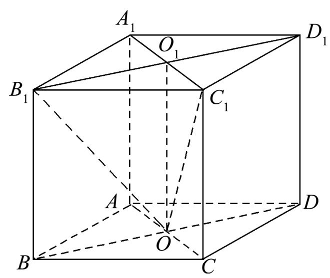
所以$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}=-2(a-2)-3(a-2)^2$.

由$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{OC}=0$及$0<a<2$,解得$a=\frac{4}{3}$.

考题强化 (2014·湖南,19,12分)如图,四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等,$AC\cap BD=O$,$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$,四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 均为矩形.

(1)证明:$O_1O\perp$底面 $ABCD$;

(2)若$\angle CBA=60°$,求二面角 C_1-OB_1-D 的余弦值.



(2)证:证明所找到的或所作的直线与已知直线垂直;

(3)用:利用线面垂直的判定定理,得出结论.

考法提炼2

判定线面垂直的四种方法

(1)利用线面垂直的判定定理.

(2)利用"两平行线中的一条与已知平面垂直,则另一条也与这个平面垂直".

(3)利用"一条直线垂直于两平行平面中的一个,则与另一个也垂直".

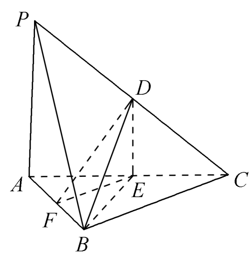
(4)利用面面垂直的性质定理.

考向2 面面垂直的判定与性质

考题展示2 (2014·江苏,16,14分)如图,在三棱锥 P-ABC 中,D,E,F 分别为棱 PC,AC,AB 的中点.已知 $PA\perp AC$,$PA=6$,$BC=8$,$DF=5$.

求证:(1)直线 $PA/\!/$平面 DEF;

(2)平面 $BDE\perp$平面 ABC.



【证明】 (1)因为 D,E 分别为棱 PC,AC 的中点,

所以 $DE/\!/PA$.

又 $PA\not\subset$平面 DEF,$DE\subset$平面 DEF,

所以直线 $PA/\!/$平面 DEF.

(2)因为 D,E,F 分别为棱 PC,AC,AB 的中点,$PA=6$,$BC=8$,

所以 $DE/\!/PA$,$DE=\frac{1}{2}PA=3$,$EF=\frac{1}{2}BC=4$.

因为 $DF=5$,所以 $DF^2=DE^2+EF^2$,

所以$\angle DEF=90°$,即 $DE\perp EF$.

又 $PA\perp AC$,$DE/\!/PA$,所以 $DE\perp AC$.

因为 $AC\cap EF=E$,$AC\subset$平面 ABC,$EF\subset$平面 ABC,

所以 $DE\perp$平面 ABC.

又 $DE\subset$平面 BDE,

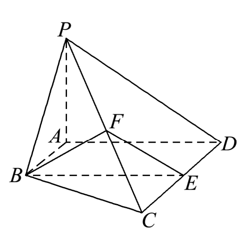
所以平面 $BDE\perp$平面 ABC.

考题强化 (2013·北京文,17,14分)如图,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$AB\perp AD$,$CD=2AB$,平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$,$PA\perp AD$.E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点.求证:

(1)$PA\perp$底面 $ABCD$;

(2)$BE/\!/$平面 PAD;

(3)平面 $BEF\perp$平面 PCD.



考情分析

面面垂直的证明是高考常考内容之一,主要是利用面面垂直的判定定理证明面面垂直,常出现在解答题的(1)(2)问中,或利用面面垂直证明其他位置关系.

名师点拨

(1)由 D,E 为 PC,AC 的中点,得出 $DE/\!/PA$,从而得出 $PA/\!/$平面 DEF.

(2)要证明平面 $BDE\perp$平面 ABC,只需证 $DE\perp$平面 ABC,即证 $DE\perp EF$,且 $DE\perp AC$ 即可,利用勾股定理的逆定理证明 $DE\perp EF$.

考法提炼1

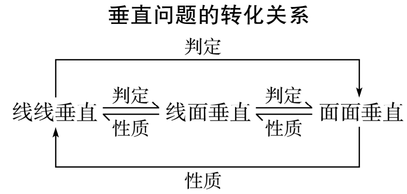
面面垂直证明的两种思路

(1)用面面垂直的判定定理,即证明其中一个平面经过另一个平面的一条垂线;

(2)用面面垂直的定义,即证明两个平面所成的二面角是直二面角,把证明面面垂直的问题转化为证明平面角为直角的问题.

考法提炼2

垂直问题的转化关系



考向3 线面角、二面角的求法

考题展示3 (1)(2013·山东,4)已知三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直,体积为$\frac{9}{4}$,底面是边长为$\sqrt{3}$的正三角形.若 P 为底面 $A_1B_1C_1$ 的中心,则 PA 与平面 ABC 所成角的大小为 ( )

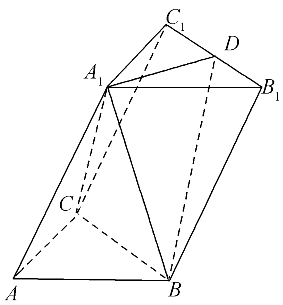
A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

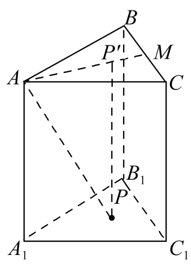
(2)(2015·浙江,17,15分)如图,在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$\angle BAC=90°$,$AB=AC=2$,$A_1A=4$,A_1 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点,D 是 B_1C_1 的中点.

①证明:$A_1D\perp$平面 A_1BC;

②求二面角 $A_1\text{-}BD\text{-}B_1$ 的平面角的余弦值.



【解析】 (1)如图所示,过 P 作 $PP'\perp$平面 ABC 于 P',则 P' 为平面 ABC 的中心.连接 AP',延长交 BC 于点 M.则$\angle P'AP$ 即为 PA 与平面 ABC 所成的角.



由 $V=Sh$,

得 $h=\frac{V}{S}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}}=\sqrt{3}$,

即 $PP'=\sqrt{3}$.

又 $AP'=\frac{2}{3}AM=1$,

所以 $\tan\angle P'AP=\sqrt{3}$,所以$\angle P'AP=\frac{\pi}{3}$,故选 B.

(2)①证明:设 E 为 BC 的中点,

由题意得 $A_1E\perp$平面 ABC,所以 $A_1E\perp AE$.

因为 $AB=AC$,所以 $AE\perp BC$.

故 $AE\perp$平面 A_1BC.

由 D,E 分别为 B_1C_1,BC 的中点,得 $DE/\!/B_1B$ 且 $DE=B_1B$,

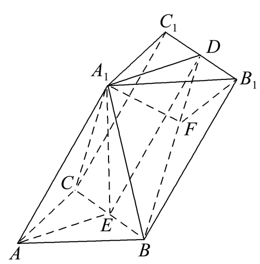
从而 $DE/\!/A_1A$ 且 $DE=A_1A$,

所以 A_1AED 为平行四边形.

故 $A_1D/\!/AE$.

又因为 $AE\perp$平面 A_1BC,

所以 $A_1D\perp$平面 A_1BC.



②方法一:作 $A_1F\perp BD$ 且 $A_1F\cap BD=F$,连接 B_1F.

由 $AE=EB=\sqrt{2}$,$\angle A_1EA=\angle A_1EB=90°$,得 $A_1B=A_1A=4$.

由 $A_1D=B_1D$,$A_1B=B_1B$,得$\triangle A_1DB$ 与$\triangle B_1DB$ 全等.

由 $A_1F\perp BD$,得 $B_1F\perp BD$,因此$\angle A_1FB_1$ 为二面角 $A_1\text{-}BD\text{-}B_1$ 的平面角.

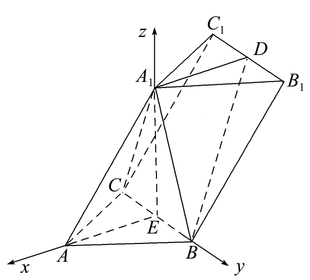
由 $A_1D=\sqrt{2}$,$A_1B=4$,$\angle DA_1B=90°$,得

$BD=3\sqrt{2}$,$A_1F=B_1F=\frac{4}{3}$,

由余弦定理得 $\cos\angle A_1FB_1=-\frac{1}{8}$.

方法二:以 CB 的中点 E 为原点,分别以射线 EA,EB 为 x,y 轴的正半轴,建立空间直角坐标系 $E\text{-}xyz$,如图所示.

由题意知各点坐标如下:



$A_1(0,0,\sqrt{14})$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$D(-\sqrt{2},0,\sqrt{14})$,$B_1(-\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{14})$,

考情分析

直线与平面所成的角,高考中有以下几种呈现方式:

(1)直接求直线与平面所成角(或某三角函数值);

(2)已知直线与平面所成角,求相关的体积、长度等.

高考中,二面角问题是各种角问题中出现频率最高的,主要考查方式有:(1)求二面角的大小;(2)已知某二面角的大小,求相关的量或参数的值,本考点是高考中的热点题型.

名师点拨

解题(2)①设 BC 的中点为 E,证明 $AE\perp$平面 A_1BC,再证明 $A_1D/\!/AE$,从而得证;②方法一:证明$\triangle A_1DB\cong\triangle B_1DB$,利用定义法构造二面角的平面角,并化归到三角形中用余弦定理求解;方法二:结合题目条件,建立空间直角坐标系,用向量的方法求解.

考法提炼1

求线面角的常用方法

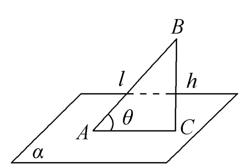
(1)找:即找出直线与平面所成的角,再通过解三角形求解,具体步骤为:

①寻找过斜线上一点与平面垂直的直线,或过斜线上一点作平面的垂线,确定垂足的位置;

②连接垂足和斜足得到斜线在平面内的射影,斜线与其射影所成的锐角或直角即为所求的角;

③将该角归结为某个三角形的内角(一般是直角三角形),通过解三角形(可能需要解多个三角形)求得该角或其三角函数值.

(2)算:①几何法:$\sin\theta=\frac{h}{l}$.其中,θ 为线面角,h 为点 B 到平面 α 的距离,l 为斜线段 AB 的长.



②空间向量法.

因此$\overrightarrow{A_1B}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{14})$,$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{14})$,$\overrightarrow{DB_1}=(0,\sqrt{2},0)$.

设平面A_1BD的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,平面$B_1BD$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$.

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{2}y_1-\sqrt{14}z_1=0,\\ -\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}y_1+\sqrt{14}z_1=0,\end{cases}$

可取$\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{7},1)$. 由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{2}y_2=0,\\ -\sqrt{2}x_2-\sqrt{2}y_2+\sqrt{14}z_2=0,\end{cases}$

可取$\boldsymbol{n}=(\sqrt{7},0,1)$.

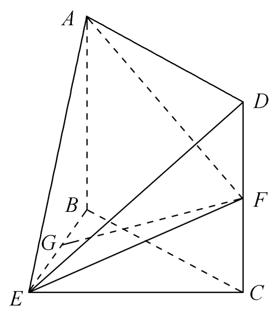
于是$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{8}$.

由题意可知,所求二面角的平面角是钝角,故二面角A_1-BD-B_1的平面角的余弦值为$-\dfrac{1}{8}$.

考题强化 (2015·福建,17,13分)如图,在几何体$ABCDE$中,四边形$ABCD$是矩形,$AB\perp$平面BEC,$BE\perp EC$,$AB=BE=EC=2$,G,F分别是线段BE,DC的中点.

(1)求证:$GF//$平面ADE;

(2)求平面AEF与平面BEC所成锐二面角的余弦值.



考法提炼2

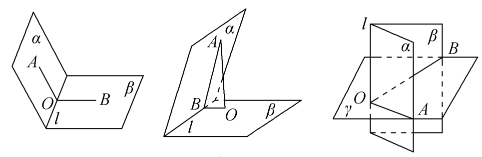
求二面角的常用方法

(1)找:

①点(定义法):在二面角的棱上找一个特殊点,在两个半平面内分别作垂直于棱的射线. 如图a,$\angle AOB$为二面角α-l-β的平面角.

②线(三垂线定理法):过二面角的一个面内一点作另一个平面的垂线,过垂足作棱的垂线,利用线面垂直可找到二面角的平面角或其补角. 如图b,$\angle ABO$为二面角α-l-β的平面角.

③面(垂面法):过棱上一点作棱的垂直平面,该平面与二面角的两个半平面产生交线,这两条交线所成的角即为二面角的平面角. 如图c,$\angle AOB$为二面角α-l-β的平面角.



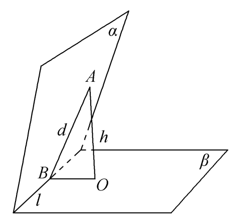
a　　b　　c

(2)算:

①射影面积公式:$\cos\theta=\dfrac{S_{射}}{S_{原}}$;

②公式法:$\sin\theta=\dfrac{h}{d}$.

说明:如图,θ为二面角的大小,h为点A到平面β的距离,d为点A到棱l的距离.



第3步 过模拟

答案 P400

1. (2016·浙江杭州二模,6)已知ABC-$A_1B_1C_1$是所有棱长均相等的直三棱柱,M是B_1C_1的中点,那么下列命题正确的是(　　)

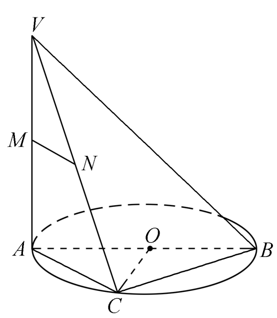
A. 在棱AB上存在点N,使MN与平面ABC所成的角为45°

B. 在棱AA_1上存在点N,使MN与平面BCC_1B_1所成的角为45°

C. 在棱AC上存在点N,使MN与AB_1平行

D. 在棱BC上存在点N,使MN与AB_1垂直

2. (2016·福建福州一模,8)如图,AB是$\odot O$的直径,VA垂直于$\odot O$所在的平面,C是圆周上不同于A,B的任意一点,M,N分别为VA,VC的中点,则下列结论正确的是(　　)



A. $MN//AB$

B. MN与BC所成的角为45°

C. $OC\perp$平面VAC

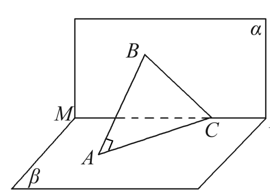
D. 平面$VAC\perp$平面VBC

3. (2016·湖南长沙十校联考,5)棱长都为2的直平行六面体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中,$\angle BAD=60°$,则对角线A_1C与侧面DCC_1D_1所成角的正弦值为(　　)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

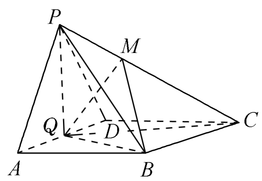
4. (2015·河北保定模拟,14)在直二面角α-MN-β中,等腰直角三角形ABC的斜边$BC\subset\alpha$,一直角边$AC\subset\beta$,BC与β所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,则AB与β所成的角是________.



5. (2016·云南师范大学附属中学模拟,17,12分)如图所示,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形,$\angle BAD=60°$,Q 为 AD 的中点.

(1)若 $PA=PD$,求证:平面 $PQB\perp$平面 PAD;

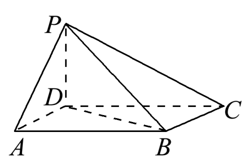
(2)点 M 在线段 PC 上,二面角 $M\text{-}BQ\text{-}C$ 为 $60°$,若平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,且 $PA=PD=AD=2$,求三棱锥 $M\text{-}BCQ$ 的体积.



6. (2015·四川成都调研,18,12分)如图,四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形,$\angle DAB=60°$,$AB=2$,$AD=1$,$PD\perp$底面 $ABCD$.

(1)证明:$PA\perp BD$;

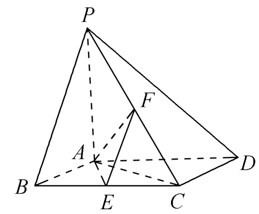
(2)若 $PD=AD$,求二面角 $A\text{-}PB\text{-}C$ 的余弦值.



7. (2016·山西师大附中模拟,17,12分)如图所示,已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形,$PA\perp$平面 $ABCD$,$\angle ABC=60°$,E,F 分别是 BC,PC 的中点.

(1)证明:$AE\perp$平面 PAD;

(2)若 H 为 PD 上的动点,EH 与平面 PAD 所成最大角的正切值为$\sqrt{3}$,求二面角 $E\text{-}AF\text{-}C$ 的余弦值.



专题知识备查

一、空间几何体的三视图、表面积和体积

1. 空间几何体的三视图

(1)几何体的三视图包括正(主)视图、侧(左)视图、俯视图,分别是从几何体的正前方、正左方、正上方观察几何体画出的轮廓线.

(2)三视图的画法

①基本要求:长对正,高平齐,宽相等.

②画法规则:正(主)侧(左)一样高,正(主)俯一样长,侧(左)俯一样宽;看不到的线画虚线.

2. 用斜二测画法画几何体的直观图的注意点

(1)用斜二测画法画几何体的直观图时,要注意原图与直观图中的"三变"、"三不变":

①"三变"$\begin{cases}\text{坐标轴的夹角改变,}\\ \text{与 } y \text{ 轴平行的线段的长度改变(减半),}\\ \text{图形改变.}\end{cases}$

②"三不变"$\begin{cases}\text{平行性不变,}\\ \text{与 } x \text{ 轴平行的线段长度不变,}\\ \text{相对位置不变.}\end{cases}$

(2)对于直观图,除了了解斜二测画法的规则外,还要了解原图形面积 S 与其直观图面积 S' 之间的关系:$S'=\frac{\sqrt{2}}{4}S$,并能进行相关的计算.

3. 多面体的侧面积和表面积

因为多面体的各个面都是平面，所以多面体的侧面积就是侧面展开图的面积，表面积是侧面积与底面积的和.

4. 旋转体的侧面积和表面积

(1)若圆柱的底面半径为 r，母线长为 l，则
$S_{侧}=2\pi rl$，$S_{表}=2\pi r(r+l)$.

(2)若圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，则
$S_{侧}=\pi rl$，$S_{表}=\pi r(r+l)$.

(3)若圆台的上、下底面半径分别为 r'，r，则
$S_{侧}=\pi(r+r')l$，$S_{表}=\pi(r^2+r'^2+r'l+rl)$.

(4)若球的半径为 R，则它的表面积 $S=4\pi R^2$.

5. 空间几何体的体积公式

几何体名称	体　积
棱(圆)柱	$V=Sh$(S 为底面面积，h 为高)
棱(圆)锥	$V=\frac{1}{3}Sh$(S 为底面面积，h 为高)
棱(圆)台	$V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$ (S'，S 为上、下底面面积，h 为高)
球	$V=\frac{4\pi}{3}R^3$(R 为球半径)

6. 与球有关的组合体的常用结论

(1)长方体的外接球：

①球心：体对角线的交点；

②半径：$r=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$($a$，$b$，$c$ 为长方体的长、宽、高).

(2)正方体的外接球、内切球及与各条棱相切的球：

①外接球：球心是正方体中心；半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}a$(a 为正方体的棱长)；

②内切球：球心是正方体中心；半径 $r=\frac{a}{2}$(a 为正方体的棱长)；

③与各条棱都相切的球：球心是正方体中心；半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}a$(a 为正方体的棱长).

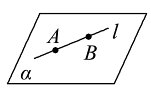
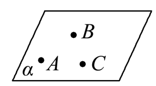
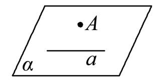
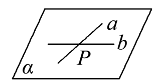
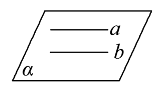
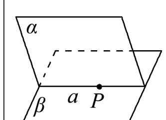
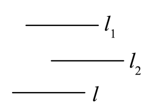
(3)正四面体的外接球与内切球(正四面体可以看作是正方体的一部分)：

①外接球：球心是正四面体的中心，半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{4}a$(a 为正四面体的棱长).

②内切球：球心是正四面体的中心，半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$(a 为正四面体的棱长).

二、线面平行与垂直的判定与性质

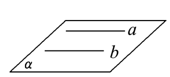
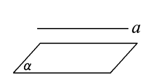
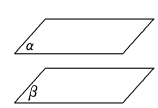
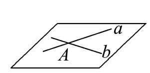
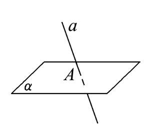
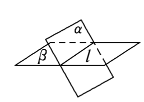
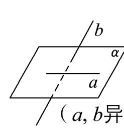
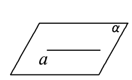
1. 平面的基本性质

名称		图形	文字语言	符号语言
公理 1			如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在这个平面内	$A\in l$，$B\in l$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$
公理 2			过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面	A，B，C 不共线$\Rightarrow A$，B，$C\in$ 平面 α，则 α 是唯一的
公理 2 的推论	推论 1		经过一条直线和直线外的一点，有且只有一个平面	若点 $A\notin$ 直线 a，则 A 和 a 确定一个平面 α
	推论 2		经过两条相交直线，有且只有一个平面	$a\cap b=P\Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$
	推论 3		经过两条平行直线，有且只有一个平面	$a\parallel b\Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$
公理 3			如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线	若 $P\in\alpha$，$P\in\beta$，则 $\alpha\cap\beta=a$，$P\in a$，且 a 是唯一的
公理 4			平行于同一直线的两条直线平行	$l_1\parallel l$，$l_2\parallel l\Rightarrow l_1\parallel l_2$

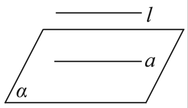
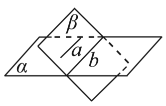
注意

要证明“点共线”可将线看作两个平面的交线，只要证明这些点都是这两个平面的公共点，根据公理 3 可知这些点在交线上，因此共线.

2. 空间中点、线、面之间的位置关系

	直线与直线	直线与平面	平面与平面
平行关系			
相交关系			
独有关系	 (a，b异面)	 ($a\subset\alpha$)	

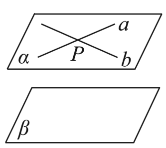
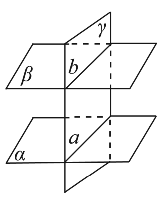
3. 直线与平面平行的判定定理与性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	不在平面内的一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行（简记为线线平行⇒线面平行）		$\left.\begin{matrix} l\not\subset\alpha \\ a\subset\alpha \\ l/\!/a \end{matrix}\right\}\Rightarrow l/\!/\alpha$
性质定理	一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行（简记为线面平行⇒线线平行）		$\left.\begin{matrix} a/\!/\alpha \\ a\subset\beta \\ \alpha\cap\beta=b \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

注意

直线与平面平行的判定定理和性质定理中的三个条件缺一不可；线面平行的性质定理可以作为线线平行的判定方法.

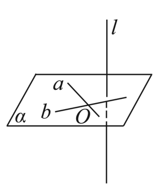
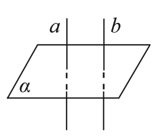
4. 平面与平面平行的判定定理与性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行（简记为线面平行⇒面面平行）		$\left.\begin{matrix} a\subset\alpha \\ b\subset\alpha \\ a\cap b=P \\ a/\!/\beta \\ b/\!/\beta \end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha/\!/\beta$
性质定理	如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行		$\left.\begin{matrix} \alpha/\!/\beta \\ \alpha\cap\gamma=a \\ \beta\cap\gamma=b \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

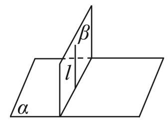
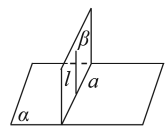
注意

平面与平面平行的性质定理实际上给出了判定两条直线平行的一种方法，注意一定是第三个平面与两平行平面相交，其交线平行.

5. 直线与平面垂直的判定定理及性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一条直线与平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直		$\left.\begin{matrix} a,b\subset\alpha \\ a\cap b=O \\ l\perp a \\ l\perp b \end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$
性质定理	垂直于同一个平面的两条直线平行		$\left.\begin{matrix} a\perp\alpha \\ b\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

6. 平面与平面垂直的判定定理及性质定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面过另一个平面的一条垂线，则这两个平面互相垂直		$\left.\begin{matrix} l\subset\beta \\ l\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$
性质定理	两个平面互相垂直，则一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面		$\left.\begin{matrix} \alpha\perp\beta \\ l\subset\beta \\ \alpha\cap\beta=a \\ l\perp a \end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$

三、空间角

1. 两条异面直线所成的角

过空间任意一点分别引两条异面直线的平行直线，那么这两条相交直线所成的锐角或直角叫作这两条异面直线所成的角. 若记这个角为 θ，则 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. 判定空间两条直线是异面直线的方法

（1）判定定理：平面外一点 A 与平面内一点 B 的连线和平面内不经过点 B 的直线是异面直线.

（2）反证法：证明两直线平行、相交不可能或证明两直线共面不可能，从而可得两直线异面.

3. 线面角

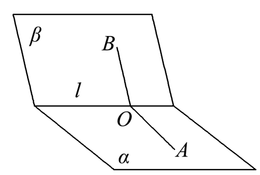
（1）当 $l\perp\alpha$ 时，线面角为 $90°$.

（2）当 $l/\!/\alpha$ 或 $l\subset\alpha$ 时，线面角为 $0°$.

（3）线面角 θ 的范围：$0°\leqslant\theta\leqslant90°$.

4. 二面角

（1）如图所示的二面角 α-l-β，若①$O\in l$，②$OA\subset\alpha$，$OB\subset\beta$，③$OA\perp l$，$OB\perp l$，则$\angle AOB$ 就叫作二面角 α-l-β 的平面角.



（2）二面角 θ 的范围：$0°\leqslant\theta\leqslant180°$.

5. 技巧归纳

（1）“线线角抓平移，线面角定射影，二面角求平面角”. 计算二面角的关键是作出二面角的平面角，方法较为灵活，还可以通过“割”或“补”找二面角的平面角. 对于无棱二面角，可以先找出棱或借助于平面法向量的夹角求解，也可以利用射影面积公式 $\cos\theta=\frac{S_{射}}{S_{原}}$ 求解.

（2）空间距离的求法一般都化归为点与点、点与线、点到面的距离来求. 不管是求角还是距离，都涉及怎样确定平面的法向量问题，这可以利用线面垂直的判定与性质定理予以确定.